

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x < 0 \\ x^2 + x + a, & x \geq 0 \end{cases}$ függvény, ahol $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Határozd meg $a \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy az f függvény folytonos legyen az $x_0 = 0$ pontban!

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képéhez az $A\left(-1; \frac{1}{e} - 1\right)$ pontban húzott érintő egyenletét!

5p c) Igazold, hogy az f' függvény csökkenő a $(0; +\infty)$ intervallumon, bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén!

2. Adottak az $I_n = \int_2^3 \frac{x^n}{x^2 - 1} dx$, $n \in \mathbb{N}$ integrálok.

5p a) Igazold, hogy $I_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

5p b) Számítsd ki: I_1 .

5p c) Bizonyítsd be, hogy $I_{n+2} - I_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$ bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén!