

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 1 \\ \ln x, & x > 1 \end{cases}$ függvény.

5p a) Tanulmányozd az f függvény folytonosságát az $x_0 = 1$ pontban!

5p b) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ határértéket!

5p c) Számítsd ki az $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(e^x) + f(e^{x^2}) + \dots + f(e^{x^{2009}})}{x^{2009}}$ határértéket!

2. Adottak az $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x^2 + 2x$ és $F(x) = e^x + \frac{x^3}{3} + x^2 + 1$ függvények.

5p a) Igazold, hogy az F függvény az f függvénynek egy primitív függvénye!

5p b) Számítsd ki az $\int_0^1 f(x) dx$ értékét!

5p c) Számítsd ki a $h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{f(x) - x^2 - 2x}{e^x + 1}$ függvény grafikus képe, az Ox koordinátatengely, valamint az $x=0$ és $x=1$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét!