

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2}$, bármely $x > 0$ esetén!

5p b) Bizonyítsd be, hogy $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \geq f(x)$, bármely $x \in (1; +\infty)$ esetén!

5p c) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) \right)$ határértéket!

2. Adottak az $I_n = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^n(x^2+1)} dx$ integrálok, ahol $n \in \mathbb{N}$.

5p a) Igazold, hogy $I_0 + I_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$.

5p b) Határozd meg I_1 -et, felhasználva az $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$ azonosságot, mely igaz bármilyen $x \neq 0$ esetén!

5p c) Igazold, hogy $I_n + I_{n-2} < \frac{1}{n-1}$, bármely $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ esetén!