

III. FELADAT (30p)

- 5p** 1. a) Tanulmányozd az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < 1 \\ 2x-1, & x \geq 1 \end{cases}$ függvény folytonosságát az $x_0 = 1$ pontban!
- 5p** b) Számítsd ki az $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x - 1$ függvény deriváltját!
- 5p** c) Határozd meg azt az a pozitív valós számot, amelyre $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = 32$.
2. Adottak az $f_n: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots + \frac{1}{x+n}$ függvények, ahol $n \in \mathbb{N}$.
- 5p** a) Számítsd ki az $\int_1^2 f_0(x) dx$ értékét!
- 5p** b) Számítsd ki $n \in \mathbb{N}$ esetén az f_n függvény grafikus képe, az Ox koordinátatengely, valamint az $x = 1$ és $x = 2$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét!
- 5p** c) Igazold, hogy a $G: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $G(x) = F(x) - \frac{5}{6}x$ függvény növekvő, ahol F egy primitív függvénye az f_1 függvénynek!