

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ függvény.

5p **a)** Határozd meg az f függvény grafikus képe $-\infty$ felé mutató aszimptotájának egyenletét!

5p **b)** Igazold, hogy $f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén!

5p **c)** Bizonyítsd be, hogy $\frac{2}{3} \leq f(x) + f(x^2) \leq 4$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén!

2. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{1}{x}$ függvény.

5p **a)** Számíts ki az $\int_1^e f(x) dx$ integrált!

5p **b)** Igazold, hogy az f függvény bármely primitív függvénye konvex a $(0, +\infty)$ intervallumon.

5p **c)** Bizonyítsd be, hogy a $g, h: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ és $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ függvények grafikus képeinek Ox koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástestek térfogatai egyenlők!