

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$, bármely $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ esetén!

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képe aszimptotájának egyenletét a $-\infty$ felé!

5p c) Bizonyítsd be, hogy $f(x) \geq 1$, bármely $x > -1$ esetén.

2. Adottak az $I_n = \int_e^{e^2} \frac{\ln^n x}{x} dx$, integrálok minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

5p a) Igazold, hogy $I_0 = 1$.

5p b) Számítsd ki az I_1 integrált!

5p c) Ismert, hogy $1 \leq \ln x \leq 2$, bármely $x \in [e, e^2]$ esetén. Esetleg ennek felhasználásával igazold, hogy
$$1 \leq \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \leq 2^n, \text{ bármely } n \in \mathbb{N} \text{ esetén!}$$