

II. FELADAT (30p)

1. Adott az
$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a \\ x + by + b^2z = b \\ x + cy + c^2z = c \end{cases}$$
 egyenletrendszer, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$ páronként különböző számok.

5p a) Ha $a = 0$, $b = 1$ és $c = 2$, oldd meg az egyenletrendszert!

5p b) Igazold, hogy $\det(A) = (a-b)(b-c)(c-a)$, ahol A az egyenletrendszer mátrixa!

5p c) Igazold, hogy az egyenletrendszer megoldása nem függ az a, b és c valós számoktól!

2. A valós számok halmazán értelmezzük a $x * y = x + y + m$ műveletet, ahol m valós szám.

5p a) Igazold, hogy a „ $*$ ” művelet asszociatív!

5p b) Határozd meg az m számot úgy, hogy az $e = -6$ semleges elem legyen a „ $*$ ” műveletre nézve!

5p c) Határozd meg az m számot úgy, hogy teljesüljön a $(-\sqrt{3}) * (-\sqrt{2}) * m * \sqrt{3} = 3\sqrt{2}$ egyenlőség!