

**III. FELADAT (30p)**

**1.** Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + e^x$  függvény.

**5p**    **a)** Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$  határértéket!

**5p**    **b)** Igazold, hogy az  $f$  függvény konvex az  $\mathbb{R}$ -en!

**5p**    **c)** Oldd meg a valós számok halmazán az  $f'(x) - f''(x) + f(x) = e^x - 3$  egyenletet!

**2.** Adottak az  $I_n = \int_0^1 x(1+x)^n dx$  integrálok, bármely  $n$  természetes szám esetén.

**5p**    **a)** Számítsd ki:  $I_1$ .

**5p**    **b)** Ismert az  $(1+x)^n \leq (1+x)^{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall x \in [0,1]$  egyenlőtlenség. Esetleg ennek felhasználásával igazold, hogy  $I_{2009} \geq I_{2008}$ .

**5p**    **c)** Ismert az  $x(1+x)^n = (1+x)^{n+1} - (1+x)^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  azonosság. Esetleg ennek felhasználásával igazold, hogy  $I_n = \frac{n \cdot 2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)}$ .