

**III. FELADAT (30p)**

**1.** Adott az  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x-3)\ln x$  függvény.

**5p**     **a)** Számítsd ki  $f'(x)$ -et, ha  $x \in (0, \infty)$ .

**5p**     **b)** Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  határértéket!

**5p**     **c)** Bizonyítsd be, hogy az  $f$  függvény konvex a  $(0, +\infty)$  intervallumon!

**2.** Adottak az  $F, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = x \cdot e^x$  és  $f(x) = (x+1)e^x$  függvények.

**5p**     **a)** Igazold, hogy az  $F$  függvény az  $f$  függvénynek egy primitív függvénye!

**5p**     **b)** Számítsd ki az  $F$  függvény grafikus képe, az  $Ox$  koordinátatengely, valamint az  $x=0$  és  $x=1$  egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét!

**5p**     **c)** Számítsd ki az  $\int_0^1 \frac{F(x) - f(x)}{e^x + 1} dx$  értékét!