

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$  függvény.

5p

a) Ellenőrizd, hogy  $f'(x) = \frac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$ , bármely  $x \in \mathbb{R}$  esetén!

5p

b) Határozd meg a  $f$  függvény grafikus képe  $+\infty$  felé mutató vízszintes aszimptotájának egyenletét!

5p

c) Igazold, hogy  $f(\sqrt[3]{2009}) \leq f(\sqrt[3]{2010})$ .

2. Adott az  $f: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x$  függvény.

5p

a) Számítsd ki:  $\int f'(x) dx$ .

5p

b) Számítsd ki az  $f$  függvény grafikus képe, az  $Ox$  koordinátatengely, valamint az  $x=1$  és  $x=e$  egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét.

5p

c) Igazold, hogy  $\int_1^e e^x f(x) dx \leq e^e - e$ .