

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)\ln x$ függvény.

5p **a)** Számítsd ki $f'(x)$ -et, ha $x \in (0, \infty)$.

5p **b)** Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ határértéket!

5p **c)** Igazold, hogy az f' függvény növekvő a $(0, +\infty)$ intervallumon!

2. Adottak az $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} + \ln x$ és $g(x) = \frac{\sqrt{x} + 2}{2x}$ függvények.

5p **a)** Igazold, hogy az f függvény a g függvénynek egy primitív függvénye!

5p **b)** Számítsd ki az $\int_1^4 f(x) \cdot g(x) dx$ értékét!

5p **c)** Bizonyítsd be, hogy $\int_1^4 g(x) \cdot f''(x) dx = -1$.