

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$ függvény.

5p a) Számítsd ki $f'(x)$ -et, ha $x \in [0,1]$.

5p b) Igazold, hogy az f függvény növekvő a $[0;1]$ intervallumon!

5p c) Bizonyítsd be, hogy $\frac{3}{e} \leq \frac{1}{f(x)} \leq 2$, bármely $x \in [0,1]$ esetén!

2. Adottak az $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$ és $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ függvények.

5p a) Igazold, hogy $F(x) = -f(x) + 1$ bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén!

5p b) Bizonyítsd be, hogy a $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = F(x) - f(x)$ függvény konkáv az \mathbb{R} -en.

5p c) Számítsd ki: $\int_0^1 x \cdot f(x^2) dx$.