

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$  függvény.

5p

a) Igazold, hogy  $f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$ , bármely  $x \in \mathbb{R}$  esetén!

5p

b) Határozd meg az  $f$  függvény monotonitási intervallumait.

5p

c) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) + g(x^2) + g(x^3) + \dots + g(x^{2009}) + x^{2010}}{x^{2009}}$  határértéket, ha

$$g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. Bármely  $n \in \mathbb{N}$  esetén adott az  $I_n = \int_e^{e^2} x \ln^n x \, dx$  integrál.

5p

a) Számítsd ki  $I_0$  értékét!

5p

b) Igazold, hogy  $I_n \leq I_{n+1}$ , bármely  $n \in \mathbb{N}$  esetén!

5p

c) Igazold, hogy az  $I_n = \frac{e^2(e^2 \cdot 2^n - 1)}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}$  összefüggés teljesül, bármely  $n \in \mathbb{N}^*$  esetén!