

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$  függvény.

**5p**

a) Igazold, hogy  $f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$ , bármely  $x \in (0; +\infty)$  esetén!

**5p**

b) Határozd meg az  $f$  függvény monotonitási intervallumait!

**5p**

c) Igazold, hogy  $3\sqrt{5} \leq 5\sqrt{3}$ .

2. Adott az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} e \cdot e^x, & x \leq -1 \\ 2 + x, & x > -1 \end{cases}$  függvény.

**5p**

a) Igazold, hogy az  $f$  függvénynek van primitív függvénye  $\mathbb{R}$ -en.

**5p**

b) Számítsd ki a  $g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x)$ ,  $x \in [0, 2]$  függvény grafikus képének  $Ox$  koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogatát!

**5p**

c) Számítsd ki az  $\int_{-2}^0 \frac{x f(x)}{e} dx$  integrál értékét!