

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, bármely $x > 0$ esetén.

5p b) Határozd meg f függvény grafikus képehez az $A(1; -1)$ pontban húzott érintő egyenletét!

5p c) Igazold, hogy $f(x) \geq -1$, bármely $x > 0$ esetén!

2. Adott az $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = ax + 1$ függvény, ahol $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Határozd meg az $a \in \mathbb{R}$ számot úgy, hogy az $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x^2 + x + 1$ függvény az f_a függvénynek egy primitív függvénye legyen!

5p b) Számítsd ki az $\int_0^1 e^x f_1(x) dx$ értékét!

5p c) Bizonyítsd be, hogy $\int_0^1 f_a^2(x) dx \geq \frac{1}{4}$ bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén!