

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2 \ln x$ függvény.

5p **a)** Számítsd ki $f'(x)$ -et, ha $x \in (1, \infty)$.

5p **b)** Igazold, hogy $\ln \frac{2010}{2009} \leq \frac{1}{2}$.

5p **c)** Bizonyítsd be az $x^2 - x \leq 2 \ln x$ egyenlőtlenséget, bármely $x \in [1, \sqrt{2}]$ esetén, felhasználva, hogy $1 \leq x \leq x^2 \leq 2$ bármely $x \in [1, \sqrt{2}]$ esetén!

2. Adottak az $I_n = \int_2^3 \frac{x^n}{x^2 - 1} dx$ integrálok, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

5p **a)** Igazold, hogy $I_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$.

5p **b)** Számítsd ki: I_1 .

5p **c)** Bizonyítsd be, hogy $I_{n+2} - I_n = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén! .