

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + \frac{x-1}{x}$ függvény.

5p a) Számítsd ki $f'(x)$ -et, ha $x \in [1, +\infty)$.

5p b) Tanulmányozd az f függvény monotonitását az $[1, +\infty)$ intervallumon!

5p c) Határozd meg az f függvény grafikus képéhez az $A(1, e)$ pontban húzott érintő egyenletét!

2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x+5, & x < -1 \\ 3x^2+1, & x \geq -1 \end{cases}$ függvény.

5p a) Bizonyítsd be, hogy az f függvénynek van primitív függvénye!

5p b) Számítsd ki az $\int_{-3}^{-2} f(x) dx$ értékét!

5p b) Igazold, hogy bármely $m \in [-1, \infty)$ esetén az f függvény grafikus képe, az Ox koordinátatengely, valamint az $x = m$ és $x = m+1$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területe legalább $\frac{5}{4}$.