

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2 \ln x$ függvény.

5p a) Számítsd ki: $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.

5p b) Igazold, hogy az f függvény konvex a $(0, +\infty)$ intervallumon!

5p c) Igazold, hogy $f(x) \geq \ln \frac{e^2}{4}$, bármely $x \in (0, +\infty)$ esetén!

2. Adottak az $f_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = m^2 x^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ függvények, ahol $m \in \mathbb{R}$.

5p a) Számítsd ki: $\int f_1(x) dx$.

5p b) Számítsd ki az $\int_0^1 e^x f_0(x) dx$ értékét!

5p c) Határozd meg az $m \in \mathbb{R}^*$ paramétert úgy, hogy $\int_0^1 f_m(x) dx = \frac{3}{2}$ legyen!