

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ függvény.

5p a). Számítsd ki $f'(x)$ -et, ha $x \in (0, \infty)$.

5p b) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ határértéket!

5p c) Bizonyítsd be, hogy $0 < f(x) \leq \frac{1}{2e}$, bármely $x \in [\sqrt{e}, +\infty)$ esetén!

2. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$ függvény.

5p a) Számítsd ki az $\int_1^e x \left(f(x) + \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx$ értékét!

5p b) Igazold, hogy az f függvény bármely primitív függvénye növekvő a $(0, +\infty)$ intervallumon!

5p c) Igazold, hogy $\int_1^2 f'(x)f(x)dx = -\frac{22}{81}$.