Tartalomjegyzék

Előszó

Jelen kiadvány a 2012. évi Erdélyi Magyar Matematikaverseny alkalmával jelenik meg, melynek házigazdája a gyergyószentmiklósi Salamon Ernő Gimnázium. Ez a verseny része Magyarország és az őt körülvevő térségek (Délvidék, Erdély, Felvidék, Kárpátalja) középiskolásainak szervezett magyar matematikai vetélkedők sorozatának, valamint csatlakozik a romániai matematikaverseny megyei és országos szakaszához.

Kiadványunk tartalmazza a 2012. évi Erdélyi Magyar Matematikaversenyre kitűzött feladatokat és azok megoldásait, valamint a résztvevő diákok és tanárok névsorát.

Köszönjük dr. Lukács Andornak, Sipos Kingának és Zsombori Gabriellának, hogy a kéziratot ellenőrizték és helyenként kiegészítették.

A versenyre érkező csapatoknak sikeres versenyzést és kellemes időtöltést kíván

dr. Baricz Árpád, a versenybizottság elnöke és
Bíró Zoltán, a verseny főszervezője

IX. osztály

1. Feladat. Határozd meg az $x, y \in \mathbb{N}$ számokat, ha

$$x + 2y + \frac{3x}{y} = 2012.$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

2. Feladat. Az $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}^*$ számok teljesítik az $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$ egyenlőséget. Bizonyítsd be, hogy az $a_1x^2 + 2c_2x + b_1 = 0$, $b_1x^2 + 2a_2x + c_1 = 0$ és $c_1x^2 + 2b_2x + a_1 = 0$ egyenletek közül legalább az egyiknek van valós megoldása!

Bencze Mihály, Brassó

3. Feladat. Oldd meg a $2^{[x]} = 1 + 2x$ egyenletet, ha $x \in \mathbb{R}$ és $[x]$ az x valós szám egész részét jelöli!

Darvas Anna-Mária, Barót

4. Feladat. Bizonyítsd be, hogy bármely hegyesszögű és nem egyenlő szárú háromszögben egy csúcs és a magasságpont által meghatározott szakasz felével, ugyanabból a csúcsból húzott oldalfelezővel és a háromszög köré írt kör sugarával szerkeszthető háromszög!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

5. Feladat. Egy háromszög két szögének mértéke $45°$ illetve $30°$. Határozd meg a háromszög leghosszabb oldalának és a $45°$-os szög csúcsából húzott oldalfelező hosszának arányát!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

6. Feladat. Bizonyítsd be, hogy egy szabályos 12 oldalú sokszög csúcsai közül bárhogyan választunk ki hetet, lesz köztük három, amelyek egy derékszögű háromszög csúcsai! Igaz-e az is, hogy bármely 7 kiválasztott csúcs közt mindig van három, amelyek egy egyenlő szárú és derékszögű háromszög csúcspontjai?

Bíró Zoltán, Gyergyószentmiklós

X. osztály

1. Feladat. Határozd meg az $[\log_2 x] = \sqrt{x} - 2$ egyenlet összes valós megoldását, ahol $[a]$ az a valós szám egész részét jelöli!

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

2. Feladat. Határozd meg a

$$7^{\log_5\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)} + 2\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = 25$$

egyenlet összes valós megoldását!

Bencze Mihály, Brassó

3. Feladat. a) Igazold, hogy bármely $z \in \mathbb{C}$ esetén teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$|z^2 + 2z + 2| + |z - 1| + |z^2 + z| \geq 3.$$

b) Az előbbi egyenlőtlenségben mikor áll fenn az egyenlőség?

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

4. Feladat. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AB = AC$, és I a háromszögbe írt kör középpontja. A BI egyenes a háromszög köré írt kört D-ben metszi. Határozd meg a háromszög szögeinek mértékét, ha $BC = ID$!

Dávid Géza, Székelyudvarhely

5. Feladat. a) Igazold, hogy egy tetszőleges ABC háromszög belső M pontja pontosan akkor van rajta az A-ból húzott oldalfelezőn, ha $T[MAB] = T[MAC]$;

b) Határozd meg az ABC háromszög belsejében azt az M pontot, amelyre

$$\frac{MA}{\sin(\widehat{BMC})} = \frac{MB}{\sin(\widehat{CMA})} = \frac{MC}{\sin(\widehat{AMB})}.$$

Longáver Lajos, Nagybánya

6. Feladat. Számítsd ki az $\underbrace{111\ldots1}_{2012\ darab}{}^2$ szám hátulról számolt hetvenharmadik számjegyét!

Darvas Anna-Mária, Barót

XI. osztály

1. Feladat. Határozd meg annak szükséges és elégséges feltételét az $a \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1, 1\}$, $b, c \in \mathbb{Z}^*$ és $d \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ számokra nézve, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $a^n + bn + c$ osztható legyen d-vel!

ifj. Kolumbán József, Kolozsvár

2. Feladat. Rögzített $n \in \mathbb{N}^*$ esetén hány $2n$-jegyű, kettős számrendszerbeli szám van, amelyben a páros helyeken álló számjegyek összege egyenlő a páratlan helyeken álló számjegyek összegével?

Bíró Zoltán, Gyergyószentmiklós

3. Feladat. Adott az $a_n = \sum_{k=1}^{n} \left(k \cdot (-1)^{\sum_{i=1}^{k} i} \right)$ sorozat. Számítsd ki az $A \in \mathcal{M}_{4,4n}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{4n} \\ a_{4n+1} & a_{4n+2} & \dots & a_{8n} \\ a_{8n+1} & a_{8n+2} & \dots & a_{12n} \\ a_{12n+1} & a_{12n+2} & \dots & a_{16n} \end{pmatrix}.$$

mátrix rangját!

Mikó Ágnes, Sepsiszentgyörgy

4. Feladat. Az $(x_n)_{n\geq 1}$ és $(y_n)_{n\geq 1}$ sorozat a következő tulajdonságokkal rendelkezik: $x_1 = 2$, $y_1 = 4$ és $x_{n+1} = 2+y_1+y_2+\ldots+y_n$, $y_{n+1} = 4 + 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Bizonyítsd be, hogy az $(x_n\sqrt{2} + y_n)_{n\geq 1}$ sorozat mértani haladvány, és határozd meg az általános tagját!

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

5. Feladat. a) Az ABM, BCN és CDP egyenlő oldalú háromszögek, $AB = a, BC = b$ és $CD = c$. Az A, B, C, D pontok, ebben a sorrendben, egy d egyenesen vannak és az M, N, P a d-nek ugyanazon az oldalán. Igazold, hogy teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + ab - ac + bc}.$$

b) Bizonyítsd be, hogy ha $a_0, a_1, \ldots, a_n > 0$ valós számok, akkor

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{a_k^2 - a_k a_{k+1} + a_{k+1}^2} \geq$$

$$\geq \sqrt{a_0^2 + a_n^2 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)^2 - a_0 a_n + (a_0 + a_n) \sum_{k=1}^{n-1} a_k}.$$

Longáver Lajos, Nagybánya

6. Feladat. Igazold, hogy végtelen sok egymással nem hasonló általános háromszög létezik, amelynek oldalhosszai természetes számok, és a háromszög oldalaira írt négyzetek területei számtani haladványban vannak!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

XII. osztály

1. Feladat. Oldd meg az egész számok halmazában a következő egyenletet:

$$\frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

2. Feladat. Tekintsük az

$$M = \left\{a^2 - 2ab + 2b^2 | a, b \in \mathbb{Z}\right\}$$

halmazt. Igazold, hogy $2012 \notin M$! Bizonyítsd be, hogy M zárt részhalmaza $\mathbb{N}$-nek az egész számok szorzására vonatkozóan!

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

3. Feladat. Oldd meg a valós számok halmazában az

$$5x^3 - 18x^2 + 43x - 6 = 3 \cdot 2^{x+2}$$

egyenletet!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

4. Feladat. Az ABC nem egyenlő szárú háromszögben $m(\widehat{BAC}) = 90°$, AD, AE és AO rendre magasság, szögfelező és oldalfelező $(D, E, O \in (BC))$. Bizonyítsd be, hogy ha $OE = 2DE$, akkor

$$AB^2 + AC^2 = 4AB \cdot AC.$$

Longáver Lajos, Nagybánya

5. Feladat. János bácsi vérnyomáscsökkentő cseppeket szed jó ideje, a következő szabály szerint: egy napig napi 1 cseppet, két napig napi 2 cseppet, …, tíz napig napi 10 cseppet, kilenc napig napi 9 cseppet, …, két napig napi 2 cseppet, egy napig napi 1 cseppet, két napig napi 2 cseppet, …. Egyik nap elfelejtette, hogy éppen hány csepp következik, végül 5 cseppet vett be. Mennyi a valószínűsége, hogy eltalálta a napi adagot? Később eszébe jutott, hogy előző nap is 5 cseppet vett be, így megnyugodott, hogy nagy valószínűséggel eltalálta az adagot. Mekkora ez az újabb valószínűség?

Mikó Ágnes, Sepsiszentgyörgy

6. Feladat. a) A $(\mathbb{Z}_{2k}, +)$ csoportnak legalább hány elemét kell kiválasztani ahhoz, hogy a kiválasztottak közt biztosan legyen három (nem föltétlenül különböző), amelyeknek az összege $\hat{0}$?

b) Ugyanaz a kérdés $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ esetén.

András Szilárd, Kolozsvár

Megoldások

IX. osztály

1. Feladat. Határozd meg az $x, y \in \mathbb{N}$ számokat, ha

$$x + 2y + \frac{3x}{y} = 2012.$$

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Első megoldás. Az egyenlet alapján látható, hogy

$$\frac{3x}{y} = 2012 - x - 2y \in \mathbb{N}.$$

Jelöljük t-vel a $\frac{3x}{y}$ tört értékét. Így $t \in \mathbb{Z}$, és az egyenlet

$$ty + 6y + 3t = 6036$$

alakban írható. Ebből következik, hogy $(t+6)(y+3) = 6054$. Mivel $6054 = 2 \cdot 3 \cdot 1009$ és 1009 prímszám, a következő lehetőségek adódnak $t + 6 \in \{6, 1009, 2018, 3027, 6054\}$. Így

$$t \in \{0, 1003, 2012, 3021, 6048\}$$

és az y-ra csak 1006 és 3 lehetséges, mivel y természetes szám és $y \neq 0$. Tehát a megoldások $(0, 1006)$ és $(1003, 3)$. $\circledast$

Második megoldás. Mivel x és y természetes számok, ezért a feladatbeli egyenletből következik, hogy $1 \leq y \leq 1006$. Szorozzuk végig az egyenletet y-nal, majd fejezzük ki az x-et:

$$xy + 2y^2 + 3x = 2012y \Rightarrow x = \frac{-2y^2 + 2012y}{y+3} = 2018 - 2y - \frac{6054}{y+3}.$$

Mivel $6054 = 2 \cdot 3 \cdot 1009$, ezért 6054-nek 6 és 1009 azok az osztói, amelyek 3-nál nagyobbak és 1010-nél kisebbek (mivel $3 < y + 3 < 1010$). Tehát $y \in \{3, 1006\}$. Ha $y = 3$, akkor a feladatbeli egyenletből $x = 1003$. Ha pedig $y = 1006$, akkor a feladatbeli egyenletből $x = 0$. Tehát a megoldáshalmaz

$$M = \{(0, 1006), (1003, 3)\}.$$

$\circledast$

2. Feladat. Az $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}^*$ számok teljesítik az $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2$ egyenlőséget. Bizonyítsd be, hogy az $a_1x^2 + 2c_2x + b_1 = 0$, $b_1x^2 + 2a_2x + c_1 = 0$ és $c_1x^2 + 2b_2x + a_1 = 0$ egyenletek közül legalább az egyiknek van valós megoldása!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Ha Δ_1, Δ_2 és Δ_3 rendre a három egyenlet diszkriminánsa, akkor

$$\begin{aligned}\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 &= 4\left(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - a_1b_1 - a_1c_1 - b_1c_1\right) \\ &= 2\left[(a_1 - b_1)^2 + (a_1 - c_1)^2 + (b_1 - c_1)^2\right] \geq 0.\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy a Δ_1, Δ_2 és Δ_3 diszkriminánsok közül legalább az egyik nem negatív, és így legalább az egyik egyenletnek van valós gyöke. $\circledast$

3. Feladat. Oldd meg a $2^{[x]} = 1 + 2x$ egyenletet, ha $x \in \mathbb{R}$ és $[x]$ az x valós szám egész részét jelöli!

Darvas Anna-Mária, Barót

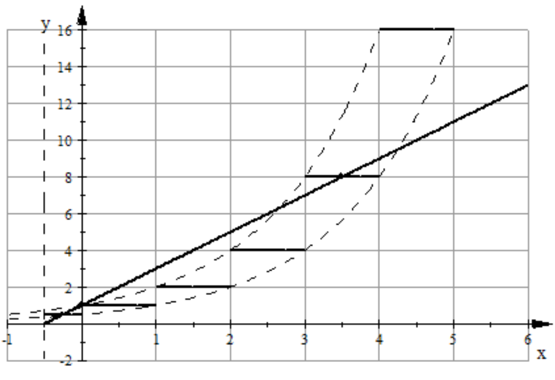
Megoldás. Mivel $2^{[x]} > 0$, bármely valós x esetén, kapjuk, hogy $x > -1/2$. Ha $x \in (-1/2, 0)$, akkor $2^{[x]} = 1/2$ és az $1/2 = 1 + 2x$ egyenletnek az $x = -1/4$ megoldása. Ha $x \in [0, 1)$, akkor $2^{[x]} = 1$

és így az $1 = 1 + 2x$ egyenletnek az $x = 0$ a megoldása. Ha $x \in [1, 2)$, akkor a $2 = 1 + 2x$ egyenletnek az $x = 1/2$ megoldása, ez viszont nem megoldása az eredeti egyenletnek, mert nem eleme az $[1, 2)$ intervallumnak. Ha $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ és $x \in [k, k + 1)$, akkor $1+2x = 2^k$ és így $x = (2^k-1)/2$. Ekkor $2k+1 \leq 2^k < 2k+3$, amely $k = 3$ esetén teljesül. Ez az $x = 7/2$ megoldást származtatja. Vegyük észre, hogy a $2^k > 2k+3$, ha $k = 4$. Mi több, matematikai indukcióval igazolható, hogy minden $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$ esetén a

$$P(k): \ 2^k > 2k + 3$$

állítás igaz. Valóban, ha $2^k > 2k + 3$, akkor $2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > (2k+3) \cdot 2$ és mivel $4k+6 > 2(k+1)+3$, a matematikai indukció elve alapján a $P(k)$ állítás minden $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$ esetén igaz. Ez alapján a $2^{[x]} = 1 + 2x$ egyenletnek nincs más megoldása. $\circledast$

Megjegyzés. A mellékelt ábrán az egyenlet jobb és bal oldalán megjelenő kifejezést ábrázoltuk, így a megoldások a két görbe metszéspontjainak felelnek meg.

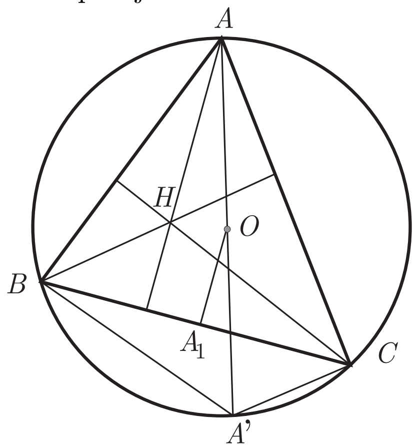


$\circledast$

4. Feladat. Bizonyítsd be, hogy bármely hegyesszögű és nem egyenlő szárú háromszögben egy csúcs és a magasságpont által meghatározott szakasz felével, ugyanabból a csúcsból húzott oldalfelezővel és a háromszög köré írt kör sugarával szerkeszthető háromszög!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Első megoldás. Legyen H az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja, O a háromszög köré írt kör középpontja, A' az A átmérősen ellentett pontja az ABC háromszög köré írt körben és D a (BC) oldal felezőpontja.



Ekkor $A'B \perp AB$, mivel $\widehat{A'BA}$ félkörbe írt kerületi szög és így $m(\widehat{A'BA}) = 90°$. Másrészt, a magasságpont értelmezése alapján kapjuk, hogy $CH \perp AB$. Ezekből következik, hogy $CH \parallel AB$. Hasonlóképpen igazolható, hogy $A'C \parallel BH$. Tehát $HBA'C$ paralelogramma és így a (BC) átló D felezőpontja a HA' átló felezőpontja is egyben. Ez máskülönben következik abból az eredményből, miszerint H-nak a D-re nézve vett szimmetrikusa az A átmérősen ellentett pontja. Most írjuk fel a (HA') szakasz felezőpontjának helyzetvektorát:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AA'}}{2},$$

ahonnan kapjuk, hogy $\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AA'}+2\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{0}$. Következésképpen,

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{0}, \tag{1}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{DA'}$ és $\overrightarrow{DA'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AO}$. Tehát az (1) alapján kapjuk, hogy az (OA) sugárral, az (AD) oldalfelezővel és az (AH) szakasz felével szerkeszthető háromszög.

$\circledast$

Megjegyzés. A megoldás vektorok nélkül is leírható, ha valamilyen módon belátjuk, hogy az AH szakasz fele egyenlő az OA_1 szakasszal, ahol A_1 a BC felezőpontja. Így a kérdéses három szakasz éppen az AOA' háromszög három oldala. Mivel ez a háromszög egy nem egyenlő szárú háromszögben mindig létezik és nem elfajult, a bizonyítás teljes. Az $AH=2\cdot OA_1$ egyenlőséget igazolhatjuk az előbbi gondolatmenet alapján (szintetikusan), de igazolhatjuk számolással is. Valóban az OA_1C derékszögű háromszögből $OA_1=R\cos A$, míg az AHB_1 háromszögben ($BB_1\perp AC, B_1\in(AC)$)

$$AH=\frac{AB_1}{\sin C}=\frac{AB\cdot\cos A}{\sin C}=2R\cos A.$$

Az utolsó egyenlőségnél használtuk a szinusz-tételt (de az egyenlőség még egy segédvonal segítségével is belátható). $\circledast$

Második megoldás. A Sylvester összefüggés alapján

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},$$

ugyanakkor

$$\overrightarrow{AA_1}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\frac{\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}}{2}=$$

$$= \frac{2\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}}{2} = \frac{2\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AH}}{2}.$$

Tehát $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{OA} + \frac{\overrightarrow{HA}}{2} = \overrightarrow{0}$.

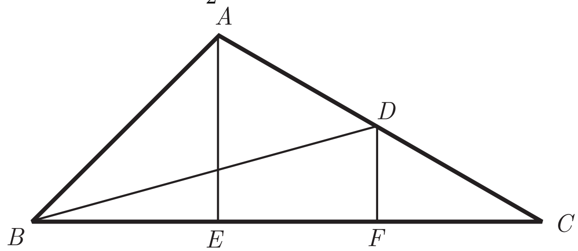
Mivel $AB \neq AC$, következik, hogy A, H, O nem kollineárisak, tehát az AA_1, OA és $\frac{AH}{2}$ szakaszokkal szerkeszthető háromszög.

$\circledast$

5. Feladat. Egy háromszög két szögének mértéke $45°$ illetve $30°$. Határozd meg a háromszög leghosszabb oldalának és a $45°$-os szög csúcsából húzott oldalfelező hosszának arányát!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Első megoldás. Ha D az AC oldal felezőpontja, E az A pont vetülete, F a D pont vetülete a BC egyenesre és $AE = h$, akkor $BC = BE + EC = h + h\sqrt{3} = h\left(1 + \sqrt{3}\right)$, $DF = \frac{h}{2}$, $BF = BE + EF = h + \frac{h\sqrt{3}}{2}$.



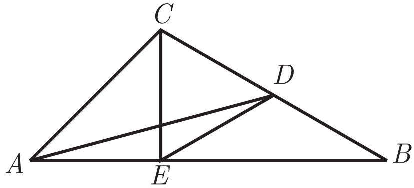
Tehát

$$BD = \sqrt{BF^2 + DF^2} = \sqrt{\frac{7}{4}h^2 + h^2\sqrt{3} + \frac{h^2}{4}} =$$

$$= h\sqrt{2 + \sqrt{3}} = h \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Így $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. $\circledast$

Második megoldás. Az ABC háromszögben legyen $m(\widehat{BAC}) = 45°$ és $m(\widehat{ABC}) = 30°$. Legyen D a (BC) oldal felezőpontja és E a C-ből húzott magasság talppontja. Vegyük észre, hogy a BCE háromszög szögei rendre $30°$, $60°$ és $90°$.



Mivel $ED = CD$ és $m(\widehat{ECD}) = 60°$, kapjuk, hogy az ECD háromszög egyenlő oldalú, vagyis $ED = DC = CE$. Másrészt, a BCE háromszögben ED az átfogóra húzott oldalfelező, és így $BD = ED$, ahonnan következik, hogy $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{DEB}) = 30°$. Az ACE derékszögű háromszögben $m(\widehat{EAC}) = 45°$, ahonnan kapjuk, hogy $CE = AE$ és így $ED = EA$. Mivel az EAD egyenlő szárú háromszög külső szöge $30°$, következik, hogy $m(\widehat{DAB}) = m(\widehat{EDA}) = 15°$. Ezek alapján $m(\widehat{CAD}) = 45° - 15° = 30°$ és $m(\widehat{ADC}) = 60° - 15° = 45°$. Tehát a szögek egyenlősége miatt az ABC és DAC háromszögek hasonlóak, ahonnan következik, hogy

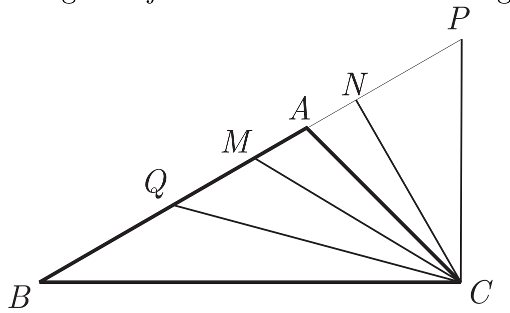
$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}.$$

A második aránypárból kapjuk, hogy $AC^2 = BC \cdot BC/2$, vagyis $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{AC} = \sqrt{2}$. ⊛

Megjegyzés. A megoldás több más gondolatmenettel is befejezhető. Például, ha nem vesszük észre, hogy a DAC háromszög hasonló az eredetihez, akkor meghúzhatjuk a D-ből az AB-re vagy az A-ból a BC-re húzott merőlegest. ⊛

Harmadik megoldás. A mellékelt ábrán a PCB háromszög C-ben derékszögű, M a BP oldal felezőpontja, CN merőleges BP-re,

CA az $\widehat{MCN}$ szögfelezője és a feladatbeli háromszög az ABC.



Az általánosság megszorítása nélkül legyen a PC oldal hossza egységnyi. Mivel egy derékszögű háromszögben a 30°-os szöggel szemben fekvő befogó hossza egyenlő az átfogó hosszának felével, ezért $BP = 2$ és így Pitagorász tétele szerint $BC = \sqrt{3}$. Az MCP egyenlő oldalú háromszögben szintén Pitagorász tétele szerint $CN = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Az MNC derékszögű háromszögben a szögfelező tétele szerint:

$$\frac{AN}{AM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ugyanakkor $AN+AM = \frac{1}{2}$, és így a két egyenletből kapjuk, hogy $AM = 2 - \sqrt{3}$ és $AN = \frac{1}{2} - AM = \frac{2\sqrt{3}-3}{2}$. Tehát $AB = AM + MB = 3 - \sqrt{3}$ és az ANC derékszögű háromszögben Pitagorász tétele szerint $AC^2 = AN^2 + CN^2 = 3\left(2 - \sqrt{3}\right)$. Így az ABC háromszögben a CQ oldalfelező hosszának négyzete az oldalfelező tétel szerint:

$$CQ^2 = \frac{2\left(AC^2 + BC^2\right) - AB^2}{4} = \frac{3}{2}.$$

Tehát

$$\frac{BC}{CQ} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{2}.$$

$\circledast$

Negyedik megoldás. A koszinusztétel alapján

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos(\widehat{BCA}),$$

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2 \cdot AC \cdot DC \cdot \cos(\widehat{BCA}).$$

Mivel, a szinusz-tétel miatt $BC = AC\sqrt{2}$, következik, hogy $2DC = AC\sqrt{2}$, azaz $AC = DC\sqrt{2}$. Ezeket behelyettesítve a fenti azonosságokba, kapjuk, hogy

$$AB^2 = DC^2 \left(6 - 4\sqrt{2}\cos(\widehat{BCA})\right),$$

$$AD^2 = DC^2 \left(3 - 2\sqrt{2}\cos(\widehat{BCA})\right).$$

Másrészt

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{BCA}) &= \cos(105^\circ) = \cos(45^\circ + 60^\circ)\\ &= \cos 45^\circ \cos 60^\circ - \sin 45^\circ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Innen következik, hogy

$$\frac{AB^2}{AD^2} = \frac{6 - 4\sqrt{2}\cos(\widehat{BCA})}{3 - 2\sqrt{2}\cos(\widehat{BCA})} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 2.$$

Tehát $AB/AD = \sqrt{2}$. ⊛

Ötödik megoldás. Az ABC háromszögben legyen $m(\widehat{BAC}) = 45^\circ$ és $m(\widehat{ABC}) = 30^\circ$, és legyen D a (BC) oldal felezőpontja. Ekkor a szinusz-tétel alapján

$$\frac{BC}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 30^\circ},$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$BC = AC\sqrt{2}.$$

Másrészt az oldalfelező tételének értelmében

$$AD^2 = \frac{2(AC^2 + AB^2) - BC^2}{4},$$

ahonnan következik, hogy $2AD^2 = AB^2$ és így $AB/AD = \sqrt{2}$.

⊛

6. Feladat. Bizonyítsd be, hogy egy szabályos 12 oldalú sokszög csúcsai közül bárhogyan választunk ki hetet, lesz köztük három, amelyek egy derékszögű háromszög csúcsai! Igaz-e az is, hogy bármely 7 kiválasztott csúcs közt mindig van három, amelyek egy egyenlő szárú és derékszögű háromszög csúcspontjai?

Bíró Zoltán, Gyergyószentmiklós

Megoldás. Általánosan igazoljuk, hogy egy $4n$-oldalú szabályos sokszög csúcsai közül bárhogyan választunk ki $2n+1$-et, biztosan lesz közöttük három, amely egy derékszögű háromszöget alkot. A bizonyítást a skatulyaelvre alapozzuk. A „skatulyák” az átmérősen ellentett pontpárok, ezek száma $2n$, tehát a kiválasztott $2n + 1$ pont között lesz legalább két átmérősen ellentett, ezek a többi $2n - 1$ pont bármelyikével egy derékszögű háromszöget alkotnak.

A továbbiakban igazoljuk, hogy az előbb kiválasztott derékszögű háromszögek között biztosan van legalább egy egyenlő szárú. A bizonyítás szintén a skatulyaelvvel történik: a „skatulyák” ezúttal a merőleges átmérőpárok, amelyek száma n, tehát a kiválasztott $2n + 1$ pont között lesz legalább három ugyanabban a „skatulyában”, s ez a három pont egy egyenlő szárú, derékszögű háromszöget alkot. ⊛

Megjegyzés. A második kérdésre egy kevésbbé tömör, de talán természetesebb gondolatmenetet vázolunk a következőkben. Próbáljunk találni 7 olyan csúcsot, amelyek közül bárhogyan is választanánk hármat, ezek nem egy egyenlő szárú és derékszögű háromszög csúcspontjai. Számozzuk meg a csúcsokat 1-től 12-ig. Amint az előbbiekben is láttuk, bárhogyan is választanánk ki hét csúcsot, mindig lesz közöttük két átmérősen ellentett. Legyenek ezek például az 1 és 7. Ekkor a 4-es és 10-es csúcsokat nem választhatjuk. Kell még választanunk öt csúcsot, és ezt nyolc közül kell megtennünk. De ezt a nyolc megmaradt csúcsot is párokba lehet szedni úgy, hogy mind a négy párban a csúcsok átmérősen ellentettek legyenek. Tehát lesz az öt csúcs között két átmérősen ellentett. Legyenek ezek például a 2 és 8. Ekkor az 5-ös és 11-es csúcsokat nem választhatjuk. Maradt négy csúcs, ezek közül hármat kell választanunk. Legyenek ezek például az 1 és 7. De ezt a négy megmaradt csúcsot is két párba lehet szedni úgy, hogy mind a két párban a csúcsok átmérősen ellentettek legyenek. Tehát lesz a három csúcs között két átmérősen ellentett. Legyenek ezek például a 3 és a 9. Ekkor viszont a 6-os és a 12-es csúcsokat nem választhatjuk. Kellene még választanunk egy csúcsot, de nincs, amik közül választanunk. Azaz akármelyik megmaradt pontot választanánk ki hetediknek, az egyenlő szárú és derékszögű háromszöget fog alkotni két másik csúccsal. Belátható, hogy ebben a gondolatmenetben a csúcsok kiválasztása (3, 9 stb.) nem befolyásolja azt, hogy a végén elakadunk, tehát a válasz a második kérdésre: igaz. ⊛

X. osztály

1. Feladat. Határozd meg az $[\log_2 x] = \sqrt{x} - 2$ egyenlet összes valós megoldását, ahol $[a]$ az a valós szám egész részét jelöli!

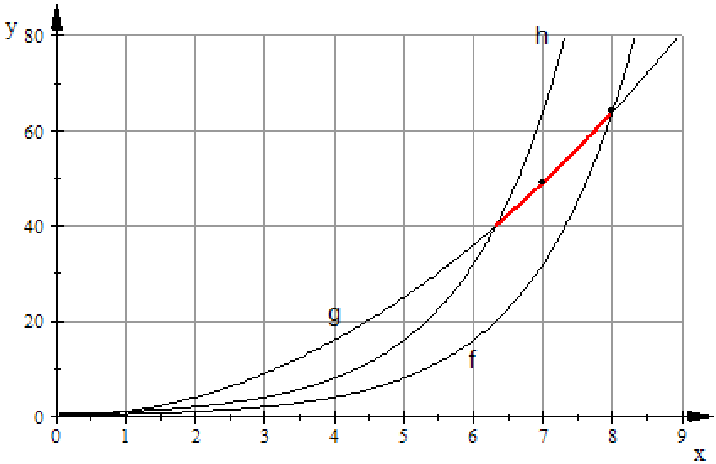
Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

Megoldás. Jelöljük k-val az $[\log_2 x]$-et. Világos, hogy $k \in \mathbb{Z}$, tehát az egyenlet alapján $x = (k+2)^2 \in \mathbb{N}$. Ugyanakkor a $k = [\log_2 x]$ egyenlőségből a $2^k \leq (k+2)^2 < 2^{k+1}$ egyenlőtlenségeket írhatjuk fel. Látható, hogy $k \leq -1$ esetén $k = -2$ kivételével a második egyenlőtlenség nem teljesülhet, $k = -2$-re nem teljesül az első egyenlőtlenség, tehát $k \geq 0$. Másrészt $k \geq 7$ esetén indukcióval igazolható, hogy $2^k \geq (k+2)^2$. Valóban $2^7 = 128 > 81 = 9^2$. Ugyanakkor ha $2^k > (k+2)^2$ valamilyen $k \geq 7$-re, akkor

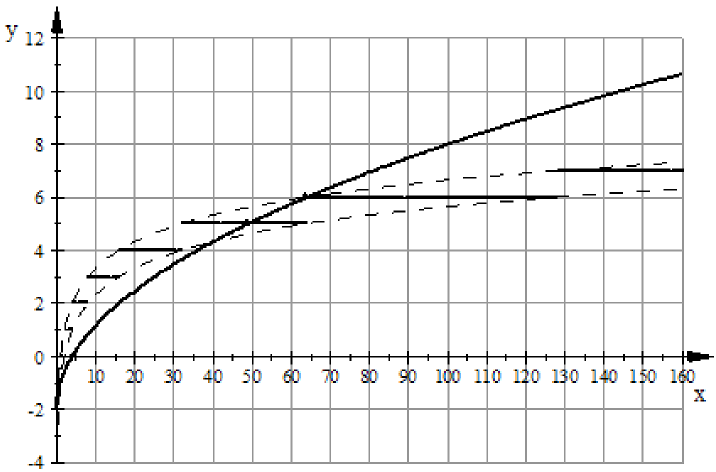
$$2^{k+1} > 2(k+2)^2 > (k+3)^2,$$

mivel $k^2 + 2k > 1$. Így a matematikai indukció elve alapján $2^k > (k+2)^2$, bármely $k \geq 7$ esetén. Így a lehetséges megoldásokra teljesül a $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ feltétel. Ezeket az eseteket kipróbálva az eredeti egyenletnek a következő megoldásaihoz jutunk $M = \{49, 64\}$. $\circledast$

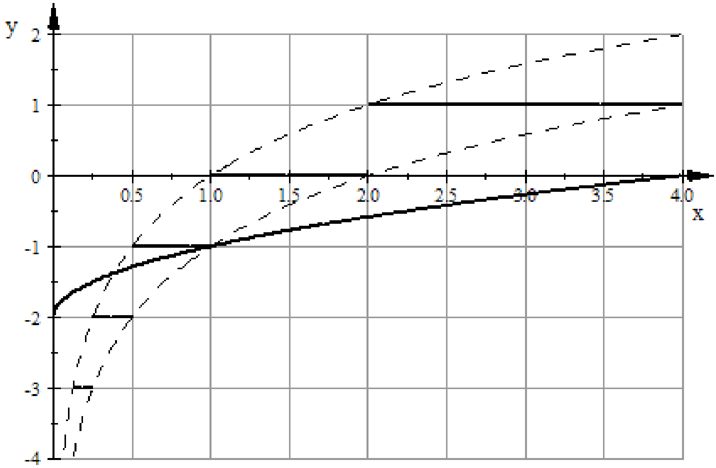
Megjegyzés. Ha megpróbáljuk a két oldalon megjelenő kifejezéseket függvényként ábrázolni, akkor a megoldások számáról és elhelyezkedéséről nyerhetünk információt, sőt valójában ez alapján fel is építhetjük a bizonyítás logikai vázát. A mellékelt első ábrán látható az $f(x) = 2^{x-2}$, $g(x) = x^2$ és $h(x) = 2^{x-1}$ függvények grafikus képei, pozitív x értékekre (a megoldásbeli $k+2$ helyett jelenik meg az x változó, ez nem azonos az eredeti egyenlet ismeretlenjével). Vastagítva látható a g függvény grafikus képének az a része, amelyre $f(x) \leq g(x) < h(x)$. Az ábrán az előbbi egyenlőtlenségnek a szigorúan pozitív egész megoldásai is be vannak jelölve.



A második ábrán megtekinthetőek az $y = [\log_2 x]$ és az $y = \sqrt{x} - 2$ függvények grafikus képei a $(0, 160]$ intervallumon:



A harmadik ábrán ugyanazoknak az $y = [\log_2 x]$ és $y = \sqrt{x} - 2$ függvényeknek a grafikus képe látható a $(0, 4]$ intervallumon:



$\circledast$

2. Feladat. Határozd meg a

$$7^{\log_5\left(x^2+\frac{4}{x^2}\right)}+2\left(x+\frac{2}{x}\right)^2=25$$

egyenlet összes valós megoldását!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Az $x^2+\frac{4}{x^2}=t$ jelöléssel az egyenletet

$$7^{\log_5 t}+2t=17 \tag{2}$$

alakban írhatjuk. Mivel az $f_1:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $f_1(t)=\log_5 t$ és az $f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_2(t)=7^t$ függvények szigorúan növekvőek, az összetettjük is az, tehát az $f_3:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $f_3(t)=7^{\log_5 t}$ függvény szigorúan növekvő. Ugyanakkor az $f_4:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_4(t)=2t$ függvény is szigorúan növekvő, tehát az $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $f=f_3+f_4$

függvény is szigorúan növekvő. Így az $f(t) = 17$ egyenletnek legfeljebb egy megoldása lehet. Ugyanakkor észrevehető, hogy $f(5) = 17$, tehát az $f(t) = 17$ egyenlet egyetlen megoldása $t = 5$. Ez alapján az eredeti egyenlet megoldáshalmaza $M = \{\pm 1, \pm 2\}$. $\circledast$

Megoldás. A függvények monotonitása nélkül is leírható a gondolatmenet, ha sikerül észrevenni, hogy $t = 5$ egy lehetséges megoldás. $t > 5$ esetén ugyanis $\log_5 t > 1$ és így $7^{\log_5 t} + 2t > 7 + 2 \cdot 5 = 17$. $t < 5$-re viszont $7^{\log_5 t} + 2t < 7 + 2 \cdot 5 = 17$, tehát az (2) egyenletnek csak a $t = 5$ megoldása van. $\circledast$

3. Feladat. a) Igazold, hogy bármely $z \in \mathbb{C}$ esetén teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$|z^2 + 2z + 2| + |z - 1| + |z^2 + z| \geq 3.$$

b) Az előbbi egyenlőtlenségben mikor áll fenn az egyenlőség?

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. a) A háromszög-egyenlőtlenség alapján írhatjuk, hogy

$$|z^2 + 2z + 2| + |z^2 + z| \geq |z + 2|, \quad \text{és}$$

$$|z + 2| + |z - 1| \geq 3.$$

Ha a két egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadjuk, akkor a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk.

b) Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha az előbbi két egyenlőtlenségben is egyenlőség van, tehát létezik olyan $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$, amelyre

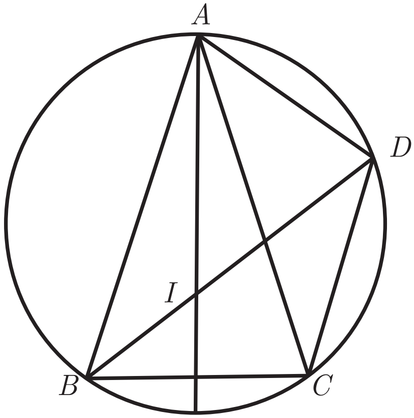
$$z^2 + 2z + 2 = \lambda_1(-z^2 - z), \quad z + 2 = \lambda_2(z - 1).$$

A második egyenlőség alapján $z \in \mathbb{R}$ és $z \in [-2, 1]$. Így viszont $|z^2+2z+2| = z^2+2z+2$, tehát az első egyenlőtlenségben pontosan akkor van egyenlőség, ha $z^2 + z \leq 0$, vagyis ha $z \in [-1, 0]$. A két feltételből tehát azt kapjuk, hogy $z \in [-1, 0]$. Belátható, hogy tetszőleges $z \in [-1, 0]$ esetén teljesül az egyenlőség. $\circledast$

4. Feladat. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AB = AC$, és I a háromszögbe írt kör középpontja. A BI egyenes a háromszög köré írt kört D-ben metszi. Határozd meg a háromszög szögeinek mértékét, ha $BC = ID$!

Dávid Géza, Székelyudvarhely

Megoldás. A mellékelt ábrának megfelelően írhatjuk, hogy $m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{CBD}) = \frac{1}{2}m(\widehat{B})$ és $m(\widehat{CAI}) = m(\widehat{IAB}) = \frac{1}{2}m(\widehat{C})$, tehát $\widehat{DAC} \equiv \widehat{DIA}$. Így $AD = DI$, tehát a feltétel alapján $BC = DI = AD = DC$.



Ebből következik, hogy $m(\widehat{B}) = 2m(\widehat{A})$, tehát a háromszög szögeinek mértéke $36°, 72°, 72°$. $\circledast$

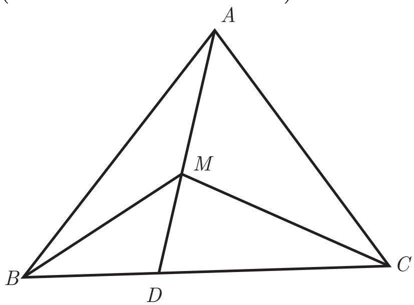
5. Feladat. a) Igazold, hogy egy tetszőleges ABC háromszög belső M pontja pontosan akkor van rajta az A-ból húzott oldalfelezőn, ha $T[MAB] = T[MAC]$;

b) Határozd meg az ABC háromszög belsejében azt az M pontot, amelyre

$$\frac{MA}{\sin(\widehat{BMC})} = \frac{MB}{\sin(\widehat{CMA})} = \frac{MC}{\sin(\widehat{AMB})}.$$

Longáver Lajos, Nagybánya

Megoldás. a) Jelöljük D-vel az MA egyenesnek a BC oldallal való metszéspontját (lásd a mellékelt ábrát).



A területképletek alapján írhatjuk, hogy

$$\frac{BD}{DC} = \frac{T[BDA]}{T[DCA]} \text{ és } \frac{BD}{DC} = \frac{T[MDB]}{T[MCD]},$$

tehát az aránysorok tulajdonságát használva

$$\frac{T[MDB]}{T[MCD]} = \frac{T[BDA]}{T[DCA]} = \frac{T[BDA] - T[MDB]}{T[DCA] - T[DCM]} = \frac{T[MAB]}{T[MAC]}.$$

Így látható, hogy általában

$$\frac{BD}{DC} = \frac{T[MAB]}{T[MAC]}.$$

Másrészt M pontosan akkor van rajta az oldalfelezőn, ha $\frac{BD}{DC} = 1$, tehát pontosan akkor, ha $\frac{T[MAB]}{T[MAC]} = 1$.

b) A feltételben szereplő törteket bővítjük a következő módon:

$$\frac{MA\cdot MB\cdot MC}{MB\cdot MC\cdot \sin(BMC)}=\frac{MA\cdot MB\cdot MC}{MA\cdot MC\cdot \sin(CMA)}=$$

$$=\frac{MA\cdot MB\cdot MC}{MA\cdot MB\cdot \sin(AMB)}.$$

Tehát a megadott egyenlőségek ekvivalensek a

$$T[MAB]=T[MBC]=T[MCA]$$

feltétellel és az a) alpont alapján ezek csakis akkor teljesülhetnek, ha M rajta van mindhárom oldalfelezőn, vagyis ha M az ABC háromszög súlypontja. $\circledast$

6. Feladat. Számítsd ki az $\underbrace{111\ldots1}_{2012\ darab}{}^2$ szám hátulról számolt hetvenharmadik számjegyét!

Darvas Anna-Mária, Barót

Megoldás. A keresett számjegy megegyezik a következő szám hetvenharmadik számjegyével:

$$A=\underbrace{111...1}_{73}+\underbrace{111...1}_{72}0+\underbrace{111...1}_{71}00+...+11\underbrace{00...0}_{71}+1\underbrace{00...0}_{72}$$

Átírjuk az A számot a következő alakba:

$$A=\frac{10^{73}-1}{9}+10\cdot\frac{10^{72}-1}{9}+...+10^{71}\cdot\frac{10^{2}-1}{9}+10^{72}\cdot\frac{10-1}{9}$$

Átcsoportosítjuk

$$A=73\cdot\frac{10^{73}}{9}-\frac{1+10+...+10^{72}}{9}=73\cdot\frac{10^{73}}{9}-\frac{10^{73}-1}{9\cdot9}=$$

$$= 8 \cdot 10^{73} + \frac{10^{73}}{9} - \frac{1}{9}\frac{10^{73}-1}{9} =$$

$$= 8 \cdot 10^{73} + \frac{1}{9}\left(1\underbrace{00..0}_{73} - \underbrace{11...1}_{73}\right) = 8 \cdot 10^{73} + \frac{1}{9}\underbrace{88...8}_{72}9$$

Mivel a fenti összeg második tagjának hetvenháromnál kevesebb számjegye van, és az első tagja hetvenhárom 0-ban végződik, következik, hogy az A szám hetvenharmadik számjegye nulla. $\circledast$

Második megoldás. A feladatbeli szám hátulról számolt hetvenharmadik számjegye 0. A számolást a következő példákon mutatjuk be:
$11^2 = \left(10^1 + 10^0\right)^2 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 10^0$

Tíz hatványai	0	1
0	1	1
1	1	1

$111^2 = \left(10^2 + 10^1 + 10^0\right)^2 = 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$

Tíz hatványai	0	1	2
0	1	1	1
1	1	1	1
2	1	1	1

$1111^2 = \left(10^3 + 10^2 + 10^1 + 10^0\right)^2 = 1 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$

Tíz hatványai	0	1	2	3
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1

A fenti példákon is látszik, hogy egy csupa egyesekből álló szám négyzetre emelését vissza tudjuk vezetni csupa egyesekből álló összeadásra.

Tíz hatványai	0	1	2	$\dots$	2011	2012
0	1	1	1	$\dots$	1	1
1	1	1	1	$\dots$	1	1
2	1	1	1	$\dots$	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
2011	1	1	1	$\dots$	1	1
2012	1	1	1	$\dots$	1	1

Ahogy a táblázatok is érzékeltetik, az eredményt úgy kapjuk meg, hogy a bal felső sarokból indulva, a mellékátlóval párhuzamos átlókban az egyeseket összeadjuk. Ekkor a végeredményben hátulról:

- az első számjegy (azaz 10^0 együtthatója): 1
- a második számjegy (azaz 10^1 együtthatója): $1 + 1 = 2$
- 3. számjegy: $1 + 1 + 1 = 3$, és ezt folytatva...
- 9. számjegy: 9 (9 db. egyes összege)
- 10. számjegy: 0 (10 db. egyes összege; leírjuk a 0-át, megy tovább az 1)
- 11. számjegy: 2 (11 db. egyes összege, plussz egy)
- 12. számjegy: 3, és ezt folytatva...
- 18. számjegy: 9
- 19. számjegy: 0 (19 db. egyes összege plussz egy; leírjuk a 0-át, megy tovább a 2)

- 20. számjegy: 2 (20 db. egyes összege, plussz kettő), és ezt folytatva...
- 27. számjegy: 9
- 28. számjegy: 0 (28 db. egyes összege plussz kettő; leírjuk a 0-át, megy tovább a 3)
- 29. számjegy: 2 (29 db. egyes összege, plussz három), és ezt folytatva, nyilván a
- 72. számjegy: 9
- 73. számjegy: 0 (73 db. egyes összege plussz hét; leírjuk a 0-át, megy tovább a 8)

$\circledast$

XI. osztály

1. Feladat. Határozd meg annak szükséges és elégséges feltételét az $a \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1, 1\}$, $b, c \in \mathbb{Z}^*$ és $d \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ számokra nézve, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $a^n + bn + c$ osztható legyen d-vel!

ifj. Kolumbán József, Kolozsvár

Megoldás. Induktív gondolkodással keresünk szükséges feltételeket. Feltételezzük, hogy a feladatban szereplő reláció fennáll. Ha $n = 0$, akkor $(1+c) \vdots d$. Ha $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges, akkor $a^n+bn+c \vdots d$ pontosan akkor teljesül, ha $\exists m \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy $a^n + bn + c = md$. Így viszont $a^{n+1} + abn + ac = amd$, vagyis

$$a^{n+1} + b(n + 1) + c = amd + b(1 - a)n + c(1 - a) + b.$$

Mivel a bal oldalon szereplő kifejezés a feltevésünknek megfelelően osztható d-vel, a jobb oldalon szereplő kifejezés is osztható kell legyen d-vel. Tehát

$$b(1-a)n + c(1-a) + b \,\vdots\, d.$$

Mivel $n \in \mathbb{N}$ tetszőleges volt, következik, hogy $b(1-a) \,\vdots\, d$ és $c(1-a)+b \,\vdots\, d$. Figyelembe véve, hogy $1-a \neq 0$ és $b \neq 0$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c(1-a)+b \,\vdots\, d \; &\Leftrightarrow c(1-a)^2 + b(1-a) \,\vdots\, d \Leftrightarrow \\ & \qquad c(1-a)^2 \,\vdots\, d \; \Rightarrow 1-a \,\vdots\, d, \end{aligned}$$

mivel c nem osztható d-vel, hiszen $c+1 \,\vdots\, d$ és $d > 1$. Visszatérve az eredeti kifejezéshez írhatjuk, hogy $a^n+bn+c = a^n-1+c+1+bn$, tehát $bn \,\vdots\, d$, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ez csak akkor lehetséges, ha $b \,\vdots\, d$. Összefoglalva, a szükséges feltételek: $1-a \,\vdots\, d$, $b \,\vdots\, d$, illetve $c+1 \,\vdots\, d$. Másrészt ezek a feltételek elégségesek is, hisz

$$a^n + bn + c = (a^n - 1) + (c+1) + bn$$

és a feltételek alapján az összeg mindhárom tagja osztható d-vel. $\circledast$

2. Feladat. Rögzített $n \in \mathbb{N}^*$ esetén hány $2n$-jegyű, kettős számrendszerbeli szám van, amelyben a páros helyeken álló számjegyek összege egyenlő a páratlan helyeken álló számjegyek összegével?

Bíró Zoltán, Gyergyószentmiklós

Megoldás. Az összeszámlálandó számok

$$\overline{a_{2n-1}a_{2n-2}\ldots a_3a_2a_1a_0}$$

alakúak, ahol $a_i \in \{0,1\}$ minden $0 \leq i \leq 2n-2$ esetén, és $a_{2n-1} = 1$. Ha a páros illetve a páratlan helyeken álló számjegyek összege

k, akkor az $A = a_{2n-1} + \cdots + a_3 + a_1$ és $B = a_{2n-2} + \cdots + a_2 + a_0$ összegeknek pontosan k tagja 1-es és a többi 0. Az A tagjaiból k darab 1-est C_{n-1}^{k-1} módon, B tagjaiból k darab 1-est C_n^k módon lehet kiválasztani, így összesen $C_{n-1}^{k-1} \cdot C_n^k$ olyan $2n$ jegyű, kettes számrendszerbeli szám létezik, amelyben a páros és a páratlan helyeken álló számjegyek száma egyaránt k. Összesen tehát

$$S_n = C_{n-1}^0 C_n^1 + C_{n-1}^1 C_n^2 + \ldots + C_{n-1}^{n-1} C_n^n$$

bináris szám van, amelyben a páros és páratlan helyeken álló számjegyek összege egyenlő. Az összeg több módszerrel kiszámítható. Egy lehetséges módszer az, hogy észrevesszük, hogy az összeg értéke az x^{n-1} együtthatója az $(1+x)^{n-1} \cdot (1+x)^n$ kifejtésében, hiszen Newton binomiális képlete alapján

$$(1+x)^{n-1} = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 x + \ldots + C_{n-1}^{n-1} x^{n-1},$$

$$(1+x)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^n$$

és a szorzás során az x^{n-1} együtthatójaként épp az S_n-et kapjuk. Másrészt
$(1+x)^{n-1} \cdot (x+1)^n = (1+x)^{2n-1}$, tehát Newton binomiális tétele alapján

$$C_{n-1}^0 C_n^1 + C_{n-1}^1 C_n^2 + \ldots + C_{n-1}^{n-1} C_n^n = C_{2n-1}^{n-1}.$$

$\circledast$

Megjegyzés. Ha tekintjük az X_1 és X_2 diszjunkt halmazokat, amelyek számossága n, illetve $n-1$, akkor az S_n az $X_1 \cup X_2$ halmaz $n-1$ elemű részhalmazainak száma (aszerint csoportosítva, hogy hány elemet tartalmaz az X_1, illetve X_2-ből), tehát $S_n = C_{2n-1}^{n-1}$. $\circledast$

3. Feladat. Adott az $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(k \cdot (-1)^{\sum\limits_{i=1}^{k} i} \right)$ sorozat. Számítsd ki az $A \in \mathcal{M}_{4,4n}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{4n} \\ a_{4n+1} & a_{4n+2} & \dots & a_{8n} \\ a_{8n+1} & a_{8n+2} & \dots & a_{12n} \\ a_{12n+1} & a_{12n+2} & \dots & a_{16n} \end{pmatrix}.$$

mátrix rangját!

Mikó Ágnes, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Először kiszámítjuk a sorozat néhány tagját: -1, -3, 0, 4, -1, -7, 0, 8, -1, -11, 0, 12, ... Ez alapján megfogalmazhatjuk a következő sejtést:

$$a_n = \begin{cases} -1, & \text{ha } n = 4k-3 \\ -4k+1, & \text{ha } n = 4k-2 \\ 0, & \text{ha } n = 4k-1 \\ 4k, & \text{ha } n = 4k \end{cases},$$

ahol $k \in \{1, 2, \dots\}$. Ellenőrizzük a képlet helyességét úgy, hogy minden esetben kiszámítjuk a_{n+1}-et. Ehhez vegyük észre, hogy minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$a_{n+1} = a_n + (-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \cdot (n+1).$$

Ha $n = 4k-3$, akkor $n+1 = 4k-2$ és

$$a_{n+1} = -1 + (-1)^{\frac{(4k-2)(4k-1)}{2}} \cdot (4k-2) = -1 - 4k + 2 = -4k + 1.$$

Ha $n = 4k-2$, akkor $n+1 = 4k-1$ és

$$a_{n+1} = -4k + 1 + (-1)^{\frac{(4k-1)4k}{2}} \cdot (4k-1) = -4k + 1 + 4k - 1 = 0.$$

Ha $n = 4k - 1$, akkor $n + 1 = 4k$ és

$$a_{n+1} = 0 + (-1)^{\frac{4k(4k+1)}{2}} \cdot (4k) = 0 + 4k = 4k.$$

És végül, ha $n = 4k$, akkor $n + 1 = 4k + 1$ és

$$a_{n+1} = 4k + (-1)^{\frac{(4k+1)(4k+2)}{2}} \cdot (4k + 1) = 4k - 4k - 1 = -1.$$

Tehát az A mátrix a következő alakú lesz

$$\begin{pmatrix} -1 & \dots & -1 & -4k-3 & 0 & 4k & \dots & 4n \\ -1 & \dots & -1 & -4n-4k-3 & 0 & 4n+4k & \dots & 8n \\ -1 & \dots & -1 & -8n-4k-3 & 0 & 8n+4k & \dots & 12n \\ -1 & \dots & -1 & -12n-4k-3 & 0 & 12n+4k & \dots & 16n \end{pmatrix}.$$

Azt kell megvizsgálnunk, hogy az oszlopok közül legtöbb hány lehet lineárisan független. A nullákat tartalmazó oszlopot figyelmen kívül hagyhatjuk. Marad három oszloptípus:

$$\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \beta_k = \begin{pmatrix} -4k-3 \\ -4n-4k-3 \\ -8n-4k-3 \\ -12n-4k-3 \end{pmatrix} \text{ és } \gamma_l = \begin{pmatrix} 4l \\ 4n+4l \\ 8n+4l \\ 12n+4l \end{pmatrix}.$$

De $\beta_k = -\gamma_l + (4k + 3 - 4l)\alpha$, tehát a három típusból legfennebb kettő szerepelhet, és ugyanabból a típusból is csak egy szerepelhet a rangot megadó aldeterminánsban, mert az első sort kivonva a többi sorból az első sor kivételével megegyeznének az oszlopok. Következik, hogy az A mátrix rangja legtöbb 2 lehet. Létezik másodrendű nemnulla aldetermináns, például

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & -4n-3 \end{vmatrix} = 4n \neq 0,$$

tehát az A mátrix rangja 2. $\circledast$

4. Feladat. Az $(x_n)_{n\geq 1}$ és $(y_n)_{n\geq 1}$ sorozat a következő tulajdonságokkal rendelkezik: $x_1 = 2$, $y_1 = 4$ és $x_{n+1} = 2+y_1+y_2+\ldots+y_n$, $y_{n+1} = 4 + 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Bizonyítsd be, hogy az $(x_n\sqrt{2} + y_n)_{n\geq 1}$ sorozat mértani haladvány, és határozd meg az általános tagját!

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

Megoldás. A kijelentés alapján kapjuk, hogy $x_n = 2 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}$ és $y_n = 4+2(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})$ minden $n \geq 2$ esetén. Ezt összevetve az eredeti alakban megadott feltétellel következik, hogy minden $n \geq 2$ esetén

$$x_{n+1} = x_n + y_n,\ y_{n+1} = y_n + 2x_n.$$

Vegyük észre, hogy mindkét egyenlőség igaz $n = 1$ esetén is mivel $x_2 = 2 + y_1 = 6$ és $y_2 = 4 + 2x_1 = 8$. Innen következik, hogy minden $n \geq 1$ esetén

$$x_{n+1}\sqrt{2}+y_{n+1} = (2+\sqrt{2})x_n+(1+\sqrt{2})y_n = (1+\sqrt{2})(x_n\sqrt{2}+y_n).$$

Ez viszont azt jelenti, hogy $(x_n\sqrt{2} + y_n)_{n\geq 1}$ egy mértani haladvány, amelynek az első tagja $x_1\sqrt{2}+y_1 = 2\sqrt{2}(1+\sqrt{2})$, hányadosa pedig $1 + \sqrt{2}$. Innen kapjuk, hogy $x_n\sqrt{2} + y_n = 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})^n$ minden $n \geq 1$ esetén. ⊛

Megjegyzés. Kiszámolható a két sorozat általános tagja is. $x_{n+1} = x_n + y_n \Rightarrow y_n = x_{n+1} - x_n$, ezt az $y_{n+1} = y_n + 2x_n$ összefüggésbe helyettesítve az $x_{n+2}-x_{n+1} = x_{n+1}-x_n+2x_n \Leftrightarrow x_{n+2}-2xn + 1-x_n = 0$ másodrendű lineáris rekurziót kapjuk, amelyet megoldva az $x_n = \left(1 + \sqrt{2}\right)^n+\left(1 - \sqrt{2}\right)^n$ általános taghoz jutunk, ahonnan $y_n = \sqrt{2}\left(\left(1 + \sqrt{2}\right)^n - \left(1 - \sqrt{2}\right)^n\right)$. A fentiek alapján $x_n\sqrt{2} + y_n = 2\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{2}\right)^n$, ami nyilvánvalóan mértani haladvány. ⊛

5. Feladat. a) Az ABM, BCN és CDP egyenlő oldalú háromszögek, $AB = a, BC = b$ és $CD = c$. Az A, B, C, D pontok, ebben a sorrendben, egy d egyenesen vannak és az M, N, P a d-nek ugyanazon az oldalán. Igazold, hogy teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + ab - ac + bc}.$$

b) Bizonyítsd be, ha $a_0, a_1, \ldots, a_n > 0$ valós számok, akkor

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{a_k^2 - a_k a_{k+1} + a_{k+1}^2} \geq$$

$$\geq \sqrt{a_0^2 + a_n^2 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)^2 - a_0 a_n + (a_0 + a_n) \sum_{k=1}^{n-1} a_k}.$$

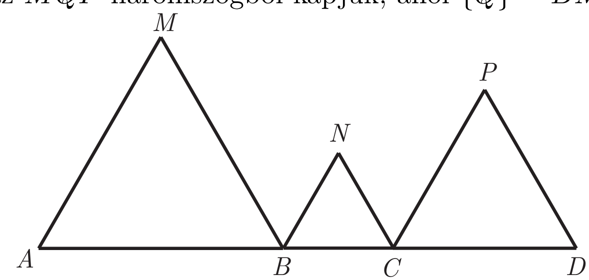
Longáver Lajos, Nagybánya

Megoldás. a) A megadott jelöléseket használva a koszinusztétel alapján (MNB illetve NPC háromszögben) írhatjuk, hogy

$$MN = \sqrt{a^2 - ab + b^2},$$

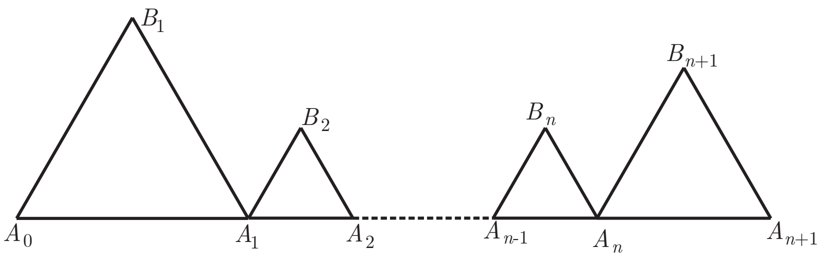
$$NP = \sqrt{b^2 - bc + c^2}$$

és $MP = \sqrt{(a+b)^2 - (a+b)(b+c) + (b+c)^2}$. Az utolsó egyenlőséget az MQP háromszögből kapjuk, ahol $\{Q\} = BM \cap CP$.



Másrészt $(a+b)^2-(a+b)(b+c)+(b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+ab-bc+ac$, tehát az M, N és P pontok segítségével felírt $MN+NP \geq MP$ egyenlőtlenség épp a bizonyítandó egyenlőtlenség.

b) Az előbbi ábrához hasonlóan elkészítünk egy ábrát, amelyen az $A_iA_{i+1}B_{i+1}$ egyenlő oldalú háromszögek A_iA_{i+1} oldalai egymás meghosszabbításában vannak, a $B_1, \ldots, B_n$ pontok az A_0A_n egyenes egyik oldalán helyezkednek el (lásd a mellékelt ábrát) és $A_iA_{i+1} = a_i$, minden $0 \leq i \leq n$ esetén.



Így a koszinusztétel alapján $B_iB_{i+1} = \sqrt{a_{i-1}^2 - a_{i-1}\cdot a_i + a_i^2}$, ha $1 \leq i \leq n$ és ha Q-val jelöljük a B_1A_1 és $B_{n+1}A_n$ metszéspontját, akkor a QB_1B_{n+1} háromszögből a koszinusztétel alapján

$$B_1B_{n+1} = \sqrt{a_0^2 + a_n^2 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)^2 - a_0a_n + (a_0+a_n)\sum_{k=1}^{n-1} a_k}.$$

Így mivel $\sum\limits_{i=1}^{n} B_iB_{i+1} \geq B1B_{n+1}$, épp a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk. $\circledast$

Megjegyzés. Az a) alpont direkt számolással is igazolható, és mindkét alpont igazolható a Minkowski egyenlőtlenség felhasználásával is. $\circledast$

6. Feladat. Igazold, hogy végtelen sok egymással nem hasonló általános háromszög létezik, amelynek oldalhosszai természetes számok, és a háromszög oldalaira írt négyzetek területei számtani haladványban vannak!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

Első megoldás. Ha $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ egy háromszög oldalai, akkor az $a + b - c > 0$, $b + c - a > 0$ és $c + a - b > 0$ egyenlőtlenségek teljesülnek. Feltételezhetjük, hogy $a < b < c$ és így tudjuk, hogy a háromszög oldalaira írt négyzetek területeire igaz, hogy $a^2 < b^2 < c^2$. Ezek a területek pontosan akkor vannak számtani haladványban, ha $a^2 + c^2 = 2b^2$. Vegyük észre, hogy ezt az azonosságot a

$$\left(\frac{c+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-a}{2}\right)^2 = b^2$$

alakban is írhatjuk, ami azt jelenti, hogy ha a és c azonos párosságú, akkor

$$\frac{c+a}{2}, \ \frac{c-a}{2} \ \text{ és } \ b$$

pitágorászi számok.

Ismeretes, hogy a pitágorászi számokat az

$$(n^2 - k^2)^2 + (2nk)^2 = (n^2 + k^2)^2$$

azonosság segítségével állíthatjuk elő, ahol $n, k \in \mathbb{N}$ és $n > k$. Az $a < b < c$ feltétel miatt csak a

$$\frac{c+a}{2} = 2nk, \ \frac{c-a}{2} = n^2 - k^2 \ \text{ és } \ b = n^2 + k^2$$

változat lehetséges, ahonnan kapjuk, hogy

$$a = 2nk - n^2 + k^2, \ b = n^2 + k^2 \ \text{ és } \ c = 2nk + n^2 - k^2.$$

Másrészt, figyelembe véve ismét az $a < b < c$ feltételt, elegendő a háromszög oldalai között fennálló egyenlőtlenségek közül az $a +$

$b - c > 0$ vizsgálata. Vegyük észre, hogy az $n > k$ és $a + b - c = 3k^2 - n^2 > 0$ feltételek teljesülnek, ha például $n = d + 1$ és $k = d$, ahol $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$. Ekkor, az

$$a = 2d^2 - 1,\ b = 2d^2 + 2d + 1 \ \text{ és } \ c = 2d^2 + 4d + 1$$

oldalhosszúságú háromszögek kielégítik a feltételeket, és így valóban végtelen sok egymással nem hasonló általános háromszög létezik, amelynek oldalhosszai természetes számok, és a háromszög oldalaira írt négyzetek területei számtani haladványban vannak. ⊛

Második megoldás. Használva az előbbi megoldás jelöléseit az $a^2 + c^2 = 2b^2$ egyenletet kell megoldani a természetes számok halmazában az $a < b < c$ és $a + b > c$ feltételekkel. Az előbbi egyenlet ekvivalens az $a^2/b^2 + c^2/b^2 = 2$ egyenlettel, és így az $x^2 + y^2 = 2$ egyenletet kell megoldani a pozitív racionális számok halmazán. Vegyük észre, hogy ez egy $\sqrt{2}$ sugarú, origó középpontú kör egyenlete, amely átmegy például a $(-1, -1)$ ponton. Most tekintsük a $(-1, -1)$ ponton áthaladó $y + 1 = m(x + 1)$ változó irányú egyenest. Ez az egyenes metszi az $x^2 + y^2 = 2$ egyenletű kört a

$$\left(-\frac{m^2 - 2m - 1}{m^2 + 1}, \frac{m^2 + 2m - 1}{m^2 + 1}\right)$$

pontokban, és így választhatjuk az

$$a = m^2 - 2m - 1,\ b = m^2 + 1 \ \text{ és } \ c = m^2 + 2m - 1$$

megoldásokat, ahol $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 4$ a kért feltételek miatt. Ezek végtelen sok, egymással nem hasonló háromszöget adnak a kért feltételekkel. ⊛

XII. osztály

1. Feladat. Oldd meg az egész számok halmazában a következő egyenletet:

$$\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{2}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

Megoldás. A létezési feltételek: $x>0$, $y>0, \frac{3}{\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $\frac{2}{\sqrt{y}}<\frac{1}{\sqrt{2}}$. Így $y>8$ és $x>18$ természetes számok.
$\frac{2}{\sqrt{y}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{x}}$, tehát $\frac{4}{y}=\frac{1}{2}+\frac{9}{x}-\frac{6}{\sqrt{2x}}$, következik, hogy $\sqrt{2x}\in\mathbb{Q}$.

$\frac{3}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{y}}$, tehát $\frac{9}{x}=\frac{1}{2}+\frac{4}{y}-\frac{4}{\sqrt{2y}}$, következik, hogy $\sqrt{2y}\in\mathbb{Q}$.

A fentiek alapján léteznek az $m,n\in\mathbb{N}$ számok úgy, hogy $x=2m^2$ és $y=2n^2$, ahol $m>3$ és $n>2$.

A feladatbeli egyenlet a következővé alakul:

$$\frac{3}{m}+\frac{2}{n}=1.$$

Ez utóbbi egyenértékű az $n=\frac{2m}{m-3}$ egyenlettel. Az $m-3$ osztja $2m$-et és $2m-6$-ot, tehát $m-3$ osztója 6-nak, ahonnan $m-3\in\{1,2,3,6\}$, tehát $m\in\{4,5,6,9\}$ és a megfelelő n értékek $n\in\{8,5,4,3\}$. Az eredeti egyenlet megoldásai

$$(x,y)\in\{(32,128),(50,50),(72,32),(162,18)\}.$$

$\circledast$

2. Feladat. a) A $(\mathbb{Z}_{2k},+)$ csoportnak legalább hány elemét kell kiválasztani ahhoz, hogy a kiválasztottak közt biztosan legyen három (nem föltétlenül különböző), amelyeknek az összege $\hat{0}$?

b) Ugyanaz a kérdés $(\mathbb{Z}_{15},+)$ esetén.

András Szilárd, Kolozsvár

Megoldás. a) Ha kiválasztjuk az összes páratlant, azok közül bármely három összege is páratlan, tehát nem lehet $\hat{0}$. Így legalább $k+1$ darab szám kiválasztása szükséges. A továbbiakban igazoljuk, hogy ez mindig elégséges is. Ha $H = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ egy tetszőleges $k+1$ elemű részhalmaza $\mathbb{Z}_{2k}$-nak, ahol $x_i < x_j$, ha $i < j$, akkor az x_0+x_1, $x_0+x_2, \ldots x_0+x_k$ összegekből akotott K halmaz k elemű. Ugyanakkor a H-beli elemek inverzeit tartalmazó H' halmaz pontosan $k+1$ elemet tartalmaz, tehát $K \cap H' \neq \emptyset$. Ha $u \in K \cap H'$, akkor létezik i, j úgy, hogy $x_i' = u = x_0 + x_j$, ahol x_i' az x_i inverze. Így $x_0 + x_i + x_j = \hat{0}$.

b) $n = 15$ esetén próbáljunk létrehozni egy olyan H halmazt, amelynek az elemszáma maximális és, amelyben nincs három olyan szám, amelyek összege $\hat{0}$. Világos, hogy $\hat{0}, \hat{5}, \hat{10} \notin H$. Ugyanakkor minden $x \in \mathbb{Z}_{13} \backslash \{\hat{0}, \hat{5}, \hat{10}\}$ esetén létezik pontosan egy olyan $y \neq x$, amelyre $2x + y = \hat{0}$ (ez a $2x$ inverze). Az előbbi tulajdonságú x és y egyidőben nem kerülhet a H-ba. Az alábbi táblázat azt mutatja, hogy minden x-hez milyen y tartozik.

1	2	3	4	6	7	8	9	11	12	13	14
13	11	9	7	3	1	14	12	8	6	4	2

A táblázat alapján látható, hogy ha egy elem H-hoz tartozik, akkor van olyan párja, amely nem tartozik H-hoz, tehát H legfeljebb 6 elemet tartalmazhat, így bármely 7 elemű részhalmazból kiválasztható 3 nem föltétlenül különböző elem, amelyek összege $\hat{0}$. Másrészt ellenőrizhető, hogy a $H = \{\hat{2}, \hat{3}, \hat{8}, \hat{12}, \hat{7}, \hat{13}\}$ halmaz elemei közt bármely három összege különbözik $\hat{0}$-tól, tehát a feltett kérdésre a válasz 7. $\circledast$

3. Feladat. Tekintsük az $M = \left\{a^2 - 2ab + 2b^2 | a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ halmazt. Igazold, hogy $2012 \notin M$! Bizonyítsd be, hogy M zárt részhalmaza $\mathbb{N}$-nek az egész számok szorzására vonatkozóan!

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Tételezzük fel, hogy $2012 \in M$. Ekkor léteznek az a és b egész számok úgy, hogy $a^2 - 2ab + 2b^2 = 2012$, azaz $(a-b)^2 + b^2 = 2012$. Egy négyzetszám 4-gyel való osztási maradéka 0 vagy 1, a 2012 osztható 4-gyel, tehát $a - b$ és b páros számok, azaz léteznek az $x, y \in \mathbb{Z}$ számok úgy, hogy $a - b = 2x$ és $b = 2y$, az egyenlet pedig egyenértékű az $x^2 + y^2 = 503$ egyenlettel, ami nem lehetséges, mert két négyzetszám összegének 4-gyel való osztási maradéka nem lehet 3. Tehát $2012 \notin M$.

Tulajdonképpen $M = \left\{x^2 + y^2 | x, y \in \mathbb{Z}\right\}$, mert egyrészt $a^2 - 2ab + 2b^2 = (a-b)^2 + b^2$, másrészt bármely $x, y \in \mathbb{Z}$ esetén létezik $a, b \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy $x^2 + y^2 = (a-b)^2 + b^2$ $(a = x + y, b = y)$.

Ha $x, y, u, v \in \mathbb{Z}$, akkor

$\left(x^2 + y^2\right)\left(u^2 + v^2\right) = x^2u^2 + x^2v^2 + y^2u^2 + y^2v^2 + 2xuyv - 2xvyu = (xu + yv)^2 + (xv - yu)^2$, és $xu + yv, xv - yu \in \mathbb{Z}$, tehát M zárt részhalmaza $\mathbb{N}$-nek az egész számok szorzására vonatkozóan.

$\otimes$

4. Feladat. Oldd meg a valós számok halmazában az

$$5x^3 - 18x^2 + 43x - 6 = 3 \cdot 2^{x+2}$$

egyenletet!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Megoldás. Észrevesszük, hogy $1, 2, 3$, és 5 megoldásai az egyenletnek. Igazoljuk, hogy nincs több megoldása. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3 \cdot 2^{x+2} - 5x^3 + 18x^2 - 43x + 6$ függvény folytonos és akárhányszor deriválható. $f'(x) = 3 \cdot \ln 2 \cdot 2^{x+2} - 15x^2 + 36x - 43$, $f''(x) = 3 \cdot \ln^2 2 \cdot 2^{x+2} - 30x + 36$, $f'''(x) = 3 \cdot \ln^3 2 \cdot 2^{x+2} - 30$ és $f^{(4)}(x) = 3 \cdot \ln^4 2 \cdot 2^{x+2} > 0$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, tehát az f''' függvénynek legfeljebb egy zérus helye lehet, az f'' függvénynek legfeljebb 2 zérus helye lehet, az f' függvénynek legfeljebb 3 zérus helye lehet, végül az f függvénynek legfeljebb 4 zérus helye lehet.

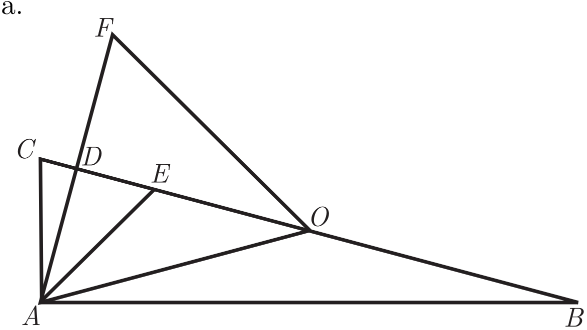
Tehát az adott egyenletnek pontosan 4 megoldása van a valós számok halmazán és ezek az $1, 2, 3$ és 5 számok. $\circledast$

5. Feladat. Az ABC nem egyenlő szárú háromszögben $m(\widehat{BAC}) = 90°$, AD, AE és AO rendre magasság, szögfelező és oldalfelező ($D, E, O \in (BC)$). Bizonyítsd be, hogy ha $OE = 2DE$, akkor

$$AB^2 + AC^2 = 4AB \cdot AC.$$

Longáver Lajos, Nagybánya

Első megoldás. Legyen F az A pont BC egyenes szerinti szimmetrikusa.

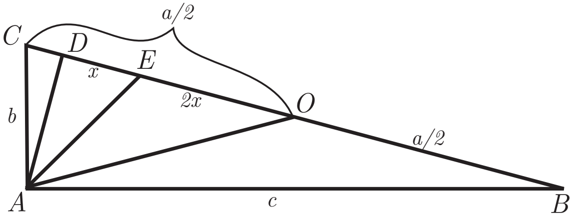


Az AOF háromszögben $OE = 2DE$, azaz E harmadolópontja az OD oldalfelezőnek, tehát E súlypont. $m(\widehat{CAD}) = m(\widehat{ABC}) = 90° - m(\widehat{C})$ és $\widehat{ABO} \equiv \widehat{BAO}$, tehát $\widehat{CAD} \equiv \widehat{BAO}$, így AE szögfelezője a DAE szögnek, ugyanakkor oldalfelező is az AOF háromszögben, tehát $AF = AO$. A szimmetria miatt $AO = OF$, következik, hogy AOF egyenlő oldalú háromszög. Tehát

$$2m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{AOC}) = 30° \Rightarrow m(\widehat{ABC}) = 15°.$$

Így $\frac{AC}{AB} = \tan 15° = 2 - \sqrt{3}$, tehát $\sqrt{3}AB = 2AB - AC$, és ebből következik, hogy $AB^2 + AC^2 = 4AB \cdot AC$. $\circledast$

Második megoldás. A szögfelező tétele alapján $\frac{AC}{AB} = \frac{CE}{EB}$. A befogó tétele alapján pedig $AC^2 = CD \cdot BC$.



Az ábra jelölései alapján az előbbi egyenlőségek a következő alakba írhatók:

$$\frac{\frac{a}{2} - 2x}{\frac{a}{2} + 2x} = \frac{b}{c} \text{ és } b^2 = \left(\frac{a}{2} - 3x\right) \cdot a.$$

Ez utóbbi két egyenlőség egyenértékű az $a(c-b) = 4(b+c)x$ és $a^2 - 2b^2 = 6ax \Leftrightarrow c^2 - b^2 = 3ax$ egyenlőségekkel. Mivel a háromszög nem egyenlő szárú, ez utóbbi egyenlőségek megfelelő oldalait eloszthatjuk egymással, és kapjuk, hogy $\frac{a}{(b+c)} = \frac{2(b+c)}{3a} \Leftrightarrow$ $3a^2 = 2\,(b+c)^2 \Leftrightarrow 3b^2+3c^2 = 2b^2+2c^2+4bc \Leftrightarrow b^2+c^2 = 4bc.$ $\otimes$

6. Feladat. János bácsi vérnyomáscsökkentő cseppeket szed jó ideje, a következő szabály szerint: egy napig napi 1 cseppet, két napig napi 2 cseppet, ..., tíz napig napi 10 cseppet, kilenc napig napi 9 cseppet, ..., két napig napi 2 cseppet, egy napig napi 1 cseppet, két napig napi 2 cseppet, ... Egyik nap elfelejtette, hogy éppen hány csepp következik, végül 5 cseppet vett be. Mennyi a valószínűsége, hogy eltalálta a napi adagot? Később eszébe jutott, hogy előző nap is 5 cseppet vett be, így megnyugodott, hogy nagy valószínűséggel eltalálta az adagot. Mekkora ez az újabb valószínűség?

Mikó Ágnes, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. $1+2+3+\ldots+9+10+9+\ldots+2 = 99$, tehát az adagolási séma periódusa 99 nap. Minden periódusban pontosan 10 olyan nap van, amikor 5 cseppet kellene bevennie. Ha n napig szedné János bácsi a cseppeket, ahol $n = 99k + r$, $k, r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < 99$, akkor a lehetséges esetek száma $n = 99k + r$ lenne és a kedvező esetek száma $10k + v$ lenne, ahol $0 \leq v \leq 10$. Így P_n-nel jelölve annak a valószínűségét, hogy n napi adagolás esetén János bácsi eltalálta az előírt mennyiséget írhatjuk, hogy

$$P_n = \frac{10n + v}{99n + r}.$$

Mivel

$$\frac{10n}{99n + 99} \leq \frac{10n + v}{99n + r} \leq \frac{10n + 10}{99n}$$

és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10n}{99n+99} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{10n+10}{99n} = \frac{10}{99}$, állíthajuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \frac{10}{99}$, vagyis annak a valószínűsége, hogy János bácsi eltalálta az előírt adagot $\frac{10}{99}$.

A második valószínűség egy feltételes valószínűség, tehát csak azok az esetek képezik a lehetséges esetek halmazát, amelyekre teljesül az, hogy az előző napi adag 5 csepp volt. Minden periódusban 10 ilyen nap van és ebből 8 esetben 5 csepp az aktuális napi adag is, tehát az n napra vonatkozó valószínűséget P'_n-nel jelölve, írhatjuk, hogy

$$P'_n = \frac{8n + u}{10n + q}.$$

Mivel

$$\frac{8n}{10n + 10} \leq \frac{8n + u}{10n + q} \leq \frac{8n + 8}{10n}$$

és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{8n}{10n+10} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{8n+8}{10n} = \frac{4}{5}$, állíthajuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} P'_n = \frac{4}{5}$, vagyis annak a valószínűsége, hogy János bácsi eltalálta az előírt adagot, ha már tudta, hogy az előző napi adag 5 csepp, $\frac{4}{5}$. $\circledast$

A versenyen résztvevő tanárok névsora

Bădău Tünde Irén	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Bartalis Márta	Salamon Ernő Gimnázium, Gyergyószentmiklós
Betuker Enikő	Horváth János Iskolaközpont, Margitta
Bíró Béla	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Bíró Judit	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Cziprok Andrei	Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémeti
Csurulya Edit	Református Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Dáni Zsuzsa	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Darvas Anna -Mária	Baróti Szabó Dávid Iskolaközpont, Barót
Egyed Géza	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
György Éva	Salamon Ernő Gimnázium, Gyergyószentmiklós
György Gabriella	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Hatházi Anna-Mária	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Kecseti Hunor	Salamon Ernő Gimnázium, Gyergyószentmiklós
Kéry Hajnal	Bihar megyei Tanfelőgyelőség, Nagyvárad
Kolumbán József	Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár
Kovács Adalbert	Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémeti
Kovács Lajos	Tamási Áron Elméleti Líceum, Székelyudvarhely
Mészár Julianna	Arany János Iskolaközpont, Nagyszalonta
Nagy Örs	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Nagy Zoltán	Mihai Eminescu Főgimnázium, Nagyvárad
Nagy Zsuzsa	Petru Maior Iskolaközpont, Szászrégen
Nemes András	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár
Oláh Ilkei Árpád	Baróti Szabó Dávid Iskolaközpont, Barót
Páll Rákhel Olga	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Péter András	Csiky Gergely Főgimnázium, Arad
Sebestyén József	Orbán Balázs Gimnázium, Székelykeresztúr
Stan Ágota	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Takács Attila János	Leőwey Klára Líceum, Máramarossziget
Tamási Csaba	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Turdean Katalin Zsuzsanna	Szilvánia Főgimnázium, Zilah
Vandra Mária	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Vass Balázs	Eötvös Lóránd Tudományegyetem, Budapest
Zákány Mónika	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya

A versenyen résztvevő diákok névsora

IX. osztály

Bács Béla	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Baricz Anita-Zsuzsanna	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Biró Júlia	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Biró Tímea	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Bocz Péter	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Boga Biborka	Baróti Szabó Dávid Iskolaközpont, Barót
Borsos Bálint	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Csala Hunor	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Csifó Laura	Orbán Balázs Gimnázium, Székelykeresztúr
Csutak Balázs	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Dombi Kristóf Barnabás	Horváth János Iskolaközpont, Margitta
Erősdi Zakariás	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Farkas Eszter	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Gagyi Mátyás	Orbán Balázs Gimnázium, Székelykeresztúr
Gotha Gunnter István	Leőwey Klára Líceum, Máramarossziget
Gyarmathy Tímea	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Heidenhoffer Erhard	Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémeti
Horváth Ilka	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Horváth Réka	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Incze Zoltán	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Jakab Benjámin	Horváth János Iskolaközpont, Margitta
Juhász Zsolt	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Juhos Attila	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Kelemen Kinga Orsolya	Baczkamadarasi Kis Gergely, Székelyudvarhely Református Kollégium
Koncz Botond	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Kopacz Anikó	Salamon Ernő Gimnázium, Gyergyószentmiklós
Kovács Arnold	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Kovács Péter Róbert	Horváth János Iskolaközpont, Margitta
Laczkó Hunor	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Lazăr Ioan Ştefan	Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémeti
Lengyel Károly	Petru Maior Iskolaközpont, Szászrégen

Lőrinczi Norbert	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Marthi Andrea	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Mester Attila	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Minor-Somlay Szilárd	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Nagy István	Szilvánia Főgimnázium, Zilah
Nagy László	Horváth János Iskolaközpont, Margitta
Nagy Lilla	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Nánia Csilla	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Oláh István Tamás	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár
Pál Magos Andrea	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Puskás-Bajkó Tímea	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Simó Magor	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Simon Ádám	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Sólyom Gellért	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Szabó Bálint	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Szabó Izabella	Csiky Gergely Főgimnázium, Arad
Szász Apolka	Baróti Szabó Dávid Iskolaközpont, Barót
Szász Boglárka	Baróti Szabó Dávid Iskolaközpont, Barót
Székely Attila	Salamon Ernő Gimnázium, Gyergyószentmiklós
Tana Andrea-Tímea	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Tóth Bianka	Csiky Gergely Főgimnázium, Arad
Tóth Blanka	Csiky Gergely Főgimnázium, Arad
Varga Anett	Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémeti
Veres Kincső	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Vízi Előd	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Voloncs Alpár	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely

X. osztály

Biró Arnold-Csaba	Szakközépiskola, Tasnád
Bîtoancă Isabela	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár
Borbély Andor	Salamon Ernő Gimnázium, Gyergyószentmiklós
Buidin Thomas Imre Cyrille	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Csáki Tamás	Orbán Balázs Gimnázium, Székelykeresztúr
Dandei Szabolcs	Szakközépiskola, Tasnád
Dancu Júlia	Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémeti
Dávid Márk Tamás	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Erős Csilla	Petru Maior Iskolaközpont, Szászrégen
Farkas-Pál Kristóf	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Forgács Ákos	Horváth János Iskolaközpont, Margitta
Földi Zsuzsanna	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Gál Béni	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Germán-Salló Zoltán	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Gulyás Beatrix	Csiky Gergely Főgimnázium, Arad
Harsa Mihály	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Hegedüs Zsófia	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Kántor Anna Erzsébet	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Kari Tamás-Zsolt	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Kémenes Attila	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Kolumbán Antal György	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Kovács Ágota	Szilvánia Főgimnázium, Zilah
Lacz Eszter	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Lántzky Anna	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Lorenzovici Zsombor	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Mag István	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Magdó Dorottya	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Magyar Norbert	Horváth János Iskolaközpont, Margitta
Makkai Hanna Borbála	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Mihály Lénárd	Református Kollégium, Szatmárnémeti
Mihály Bernadett	Csiky Gergely Főgimnázium, Arad
Miklós Aba Lóránt	Baróti Szabó Dávid Iskolaközpont, Barót
Popescu Andrea	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Prosan Tímea	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Rancz Sándor	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely

Rétyi Dorottya	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Sallai Eliza	Apáczai Csere János Elméleti Líceum, Kolozsvár
Sandy Bálint Mátyás	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Soós Ildikó Csilla	Baróti Szabó Dávid Iskolaközpont, Barót
Szabó Ágota Hella	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár
Szász Tamás-Csaba	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Székely István	Salamon Ernő Gimnázium, Gyergyószentmiklós
Szentpáli Réka	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Szilágyi Ottó	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Tamási Tímea	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Tóth Emőke	Orbán Balázs Gimnázium, Székelykeresztúr
Tóth Melinda	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Ülkei Zsófia	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely

XI. osztály

Bala Zsolt	Baróti Szabó Dávid Iskolaközpont, Barót
Benkő Mária Beatrix	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Borbély Ruben-Zsolt	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Boros Bernadett	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Both Richárd	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Császár Szabolcs	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Dudás Ádám	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Faluvégi Ágota	Szilvánia Főgimnázium, Zilah
Farkas Izabella Ingrid	Baróti Szabó Dávid Iskolaközpont, Barót
Gazsa Gergő	Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémeti
Gothárd Szabolcs	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Györfi Csenge	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Halada Szilárd	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Iffiu Szabolcs	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Jaskó György	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Kajántó Sándor	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Kiss Gyöngyi	Brassai Sámuel Elméleti Líceum, Kolozsvár
Kurunczi Papp Dávid	Csiky Gergely Főgimnázium, Arad
László Gábor	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Lestyán Attila	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Magyar Lilla	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad

Máté Brigitta	Szilvánia Főgimnázium, Zilah
Máté Péter	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Mátyás-Barta Kinga	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Megyesi Attila	Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémeti
Murvai Dávid	Csiky Gergely Főgimnázium, Arad
Nemes András Zoltán	Bartók Béla Elméleti Líceum, Temesvár
Oláh László Róbert	Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémeti
Oláh Mátyás	Horváth János Iskolaközpont, Margitta
Orbán Eszter	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Páll József Attila	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Páll Katinka-Pálma	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Püsök Nóra	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Sikó Tamás	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Smeu Júlia	Csiky Gergely Főgimnázium, Arad
Szabó Sinka Sámuel	Református Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Takács Gergő	Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Varga Csenge	Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémeti
Zsebe Enikő	János Zsigmond Unitárius Kollégium, Kolozsvár

XII. osztály

Bagoly Attila	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Birtalan Zoltán	Németh László Elméleti Líceum, Nagybánya
Budai Kinga	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Cseh Júlia	Nagy Mózes Elméleti Líceum, Kézdivásárhely
Demény Dávid	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Farkas Zita Ágota	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Fülöp-Balogh Beatrix-Emőke	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Gilyén Hunor	János Zsigmond Unitárius Kollégium, Kolozsvár
Gyéresi Hunor	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Kegyes Krisztina-Timea	Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Kémenes Endre	Salamon Ernő Gimnázium, Gyergyószentmiklós
Kilyén Nándor Alpár	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Komán Zsombor	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Kovács Boldizsár	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely

Kuti-Kreszács Mátyás	Horváth János Iskolaközpont, Margitta
Kuzman Gabriella	Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémeti
Lakatos Tamás	Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémeti
Lázár Zsolt	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Lengyel Sándor	Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémeti
Mester Ágnes	Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Móricz Sándor	Szilvánia Főgimnázium, Zilah
Nagy Tamás	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Péter Emőke	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Polgár István	Salamon Ernő Gimnázium, Gyergyószentmiklós
Porsche Endre	Tamási Áron Gimnázium, Székelyudvarhely
Sandy Endre Kristóf	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Szabó Ágnes	Horváth János Iskolaközpont, Margitta
Szabó Zsolt	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Szabó-Györke István	Márton Áron Gimnázium, Csíkszereda
Szederjesi Arnold	Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Tomos Réka	Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó

A feladatok szerzőinek névjegyzéke