ELŐSZÓ

„Semmiből egy új, más világot teremtettem.”
Bolyai János

Marosvásárhely, az egykori Székelyföld fővárosa, a két Bolyai által vált a matematika fővárosává is. Az általuk elindított folyamatot a Ferenc József és a Bolyai Tudományegyetemek teljesítették ki.

A semmiből egy új világot teremtve, az erdélyi matematika tanárok és diákok serege, 1990-ben többfordulós versenyként elindította Brassóból az Erdélyi Magyar Matematikaversenyt.

Az EMMV immár három éve kétfordulós versennyé strukturálódott, egyik iránya a romániai matematika verseny megyei és országos szakaszához csatlakozik. Így a Tanügy-Minisztérium elismert versenyeként, a hivatalos oklevelek mellett anyagi támogatásban is részesül az idén. A másik iránya a Kárpát-medencét átfogó Nemzetközi Magyar Matematikaverseny erdélyi válogató szakasza.

Az EMMV vonulatát a hozzáépült Wildt József, Radó Ferenc, Neumann János és Benkő József versenyek gazdagítják.

Olyan fehér és árva a sík, fölötte álom-éneket dúdolnak a hideg axiómák. Az Univerzum vajon mit álmodik? Ezt az álmot fejtegetik évezredek óta a matematikusok. Titkaikat megosztják versenyeinken is, ami a tanároknak így a vándorgyűlés szerepét is betölti.

Köszönet a Romániai Tanügy-Minisztériumnak, a Bolyai Farkas Elméleti Líceum tanári karának, a Sapientia-EMTE marosvásárhelyi karának, Marosvásárhelynek, a támogatóknak, a szülőknek, hogy az idén is egy rangos versenyen vehettünk részt.

Bencze Mihály

FELADATOK

I. FORDULÓ

IX. OSZTÁLY

1. Oldd meg a természetes számok halmazán az $x+y+\frac{x}{y}=19$ egyenletet!

Kovács Béla, Szatmárnémeti

2. Adott az $A=\{1,2,3,4,...,121\}$ halmaz. Határozd meg azoknak az $(a_i)_{i=\overline{1,k}}$, $3\leq k$, véges számtani haladványoknak a számát, amelyek állandó különbsége legalább 1 és legfeljebb 6 valamint minden tagja az A halmazban van.

Csapó Hajnalka, Csíkszereda

3. Egy konvex hatszög alakú földterületet az átlók mentén parcelláznak fel, majd teleszórják búzamaggal. Összesen 1000001 búzamagot vetnek el. Igazold, hogy van olyan parcella, amelyre legalább 40001 búzamagot szórnak!

Csapó Hajnalka, Csíkszereda

4. Az ABC háromszög $[AB]$ oldalának hossza prímszám. BM az $\widehat{ABC}$ szögfelezője ($M\in(AC)$). $N\in(BC)$ és $T\in(BM)$ úgy, hogy $MN\parallel AB$ és $NT\parallel AC$. Ha $T_{BAT}=\frac{9}{25}T_{ABC}$, igazold, hogy a $[BC]$ oldal hossza is prímszám!

Szilágyi Jutka, Kolozsvár

5. Az ABC háromszögben $AB<BC$. Legyen AD és CE a háromszög két magassága ($D\in(BC)$, $E\in(AB)$) és M az (AC) oldal felezőpontja. Az $\widehat{EMD}$ szögfelezője az (AB) oldalt F-ben metszi. Az AB egyenesen felvesszük a K pontot úgy, hogy $(CA$ a $\widehat{BCK}$ szögfelezője legyen. Bizonyítsd be, hogy a BFD és BCK háromszögek hasonlók!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

6. Egy bolha ugrál egy kör kerületén az óramutatók járásának irányába. Első ugrásának egy 1°-os középponti szög felel meg, második ugrásának 2°-os középponti szög felel meg és általában a k-adik ugrásának k°-os szög felel meg. Hányadik ugrásával kerül először olyan pontra, ahol már járt?

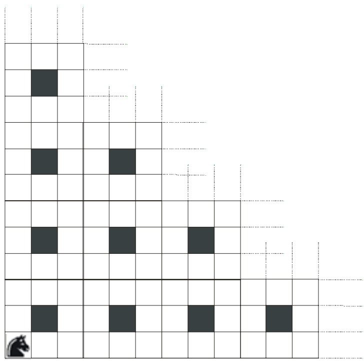
Demeter Albert, Kolozsvár

X. OSZTÁLY

1. Határozd meg a p, q prímszámokat, ha $16^p = 2765 + q^3$.

Szilágyi Jutka, Kolozsvár

2. Egy $3n \times 3n$ táblát n^2 darab 3×3-as táblára bontunk és mindenik 3×3-as középső mezejét kivesszük a táblából (lásd a mellékelt ábrát). A megmaradt rész bal alsó sarkából egy huszárral indulunk (ló lépésben lépünk) és a jobb felső sarokba kell jutnunk. Legalább hány lépés szükséges ehhez?



András Szilárd, Nagy Örs, Kolozsvár

3. Egy konvex hétszög alakú földterületet az átlók mentén parcelláznak fel, majd teleszórják búzamaggal. Összesen 2000001 búzamagot vetnek el. Igazold, hogy van olyan parcella, amelyre legalább 40001 búzamagot szórnak.

Csapó Hajnalka, Csíkszereda

4. Az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ konvex hatszög oldalaira kifele megszerkesztjük az $A_iM_iA_{i+1}$, $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ háromszögeket ($A_7 = A_1$), amelyekben $m\left(\widehat{A_iM_iA_{i+1}}\right) = 120^\circ$. Igaz-e, hogy a szerkesztett háromszögek köré írt körök által meghatározott körlapok lefedik a hatszöget?

Szász Róbert, Marosvásárhely

5. Az ABC háromszögben $AB=5$, $BC=6$ és $AC=7$. Legyen $D\in(BC)$ és $E\in(AC)$ úgy, hogy $AD=AB$ és $17\cdot AE=10\cdot AC$. Bizonyítsd be, hogy az ABD háromszögbe írt kör középpontja, az ADC háromszög súlypontja és az E pont egy egyenesen helyezkednek el!

Olosz Ferenc, Szatmárnémeti

6. Igazold, hogy ha $2-\frac{1}{n}<x<2+\frac{1}{n}$, ahol $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$, akkor

$$2-\frac{1}{n+k}<\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+x}}}<2+\frac{1}{n+k},$$

ahol $k\in\mathbb{N}^*$ a négyzetgyökök száma.

Bencze Mihály, Brassó

XI-XII. OSZTÁLY

1. Egy bolha ugrál egy kör kerületén az óramutatók járásának irányába. Első ugrásának egy 1°-os középponti szög felel meg, második ugrásának 2°-os középponti szög felel meg, és általában a k-adik ugrásnak 2^{k-1} fokos szög felel meg. Hányadik ugrásával kerül először olyan pontra, ahol már járt?

Demeter Albert, Kolozsvár

2. a) Adott $n\in\mathbb{N}$ szám esetén határozd meg az $\begin{cases} x+y\geq n+1 \\ x\leq n \\ y\leq n \end{cases}$, $(x,y)\in\mathbb{N}^2$ rendszer megoldásainak számát!

b) Egy szavazáson három pártra lehetett szavazni, összesen 2009-en szavaztak és minden szavazat érvényes (minden szavazó pontosan egy pártra szavazott). Hányféleképpen lehetséges ez, ha tudjuk, hogy egyik bármelyik két pártnak több szavazata van, mint a harmadiknak!

Szász Róbert, Marosvásárhely

3. Egy táblára felírtuk az $1, 2, 3, \ldots, 2009$ számokat. Egy lépésben a táblán levő számok közül letörlünk hármat. Ha a letörölt számok $a \le b \le c$, akkor helyettük visszaírjuk a $b^{2009} - a^{2009}$ és a $c^{2009} - a^{2009}$ számokat. Lehetséges-e, hogy a végén $2009^{2009} - 2008^{2009}$ és $1001^{2009} - 1000^{2009}$ maradjon a táblán?

Csapó Hajnalka, Csíkszereda

4. a) Az ABC háromszögben $M \in [BC]$, $N \in [CA]$ és $P \in [AB]$ úgy, hogy az MN és MP az $\widehat{AMC}$ illetve $\widehat{AMB}$ szögfelezője. Igazold, hogy $AM \cap BN \cap CP \neq \varnothing$.

b) Bizonyítsd be, hogy ha az ABC háromszögben $M \in [BC]$, $N \in [CA]$ és $P \in [AB]$ úgy, hogy $AM \cap BN \cap CP \neq \varnothing$ valamint $m(\widehat{PMN}) = 90^\circ$, akkor MN és MP az $\widehat{AMC}$ illetve $\widehat{AMB}$ szögfelezője.

András Szilárd, Kolozsvár

5. Legyen O és H az ABC háromszög köré írt körének középpontja illetve magasságpontja, valamint G_1, G_2 és G_3 a HBC, HAC, illetve HAB háromszög súlypontja. Igazold, hogy az AG_1, BG_2 és CG_3 egyenesek összefutók és a $G_1G_2G_3$ háromszög súlypontja az OM egyenesen van!

Bencze Mihály, Brassó

6. Adott az $a \in \mathbb{R}$ szám. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény esetén

$$\left[f^3(x+y)\right] = \left[f^3(x+a)\right] + \left[f^3(y-a)\right],\ \forall x, y \in \mathbb{R},$$

ahol $[x]$ az x valós szám egészrészét jelöli.

a) Igazold, hogy $\left[f^3(x+y)\right] = \left[f^3(x)\right] + \left[f^3(y)\right],\ \forall x, y \in \mathbb{R}$,

b) Igazold, hogy $f^2(x) \le f(x) + 1$ minden x valós szám esetén!

Demeter Albert, Kolozsvár

II. FORDULÓ

IX. OSZTÁLY

1. Határozd meg az $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{N}^*$ számokat, $n \in \mathbb{N}^*$ ha tudjuk, hogy

$$x_1 + \ldots + x_n = 4n - 4 \text{ és } \frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} = 1.$$

Farkas Csaba, Kolozsvár

2. Számítsd ki a $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$ összeget az $n \in \mathbb{N}^*$ függvényeként!

Bencze Mihály, Brassó

3. Adott az $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, $n \geq 3$ számtani haladvány.

a) Igazold, hogy $a_1 a_6 + a_3 a_4 \leq 2a_2 a_5$.

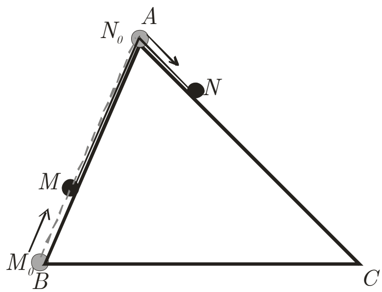
b) Határozd meg azon $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ számokat, amelyekre

$$a_1 a_n + a_2 a_{n-1} + \ldots + a_{n-1} a_2 + a_n a_1 \leq n a_k a_{n-k+1}.$$

Bencze Mihály, Brassó

4. A mellékelt ábrán az M és N pontszerű testeket egy rögzített hosszúságú madzag köti össze. Kezdeti állapotban az M test a B pontban és az N az A pontban van, majd addig mozog amíg az M test az A pontba kerül $(AB < AC)$. Mi a mértani helye a két testet összekötő szakasz felezőpontjának?

Csapó Hajnalka, Csíkszereda



X. OSZTÁLY

1. Határozd meg azokat az $x_1, x_2, ..., x_n \in (1, \infty)$ számokat, amelyekre

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n = 8 \\ \log_{x_1} 2 + \log_{x_2} 2 + ... + \log_{x_n} 2 = 3 \end{cases}$$

Longáver Lajos, Nagybánya

2. Határozd meg az $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvényeket, amelyekre

$$2009f(x) - 2007f(f(x)) = 2x\,,\ \forall x \in \mathbb{Z}$$

Farkas Csaba, Kolozsvár

3. Határozd meg a $2^{\frac{x^2+1}{4x}} = \cos\frac{\pi x}{4} + \sin\frac{\pi x}{4}$ egyenlet pozitív megoldásait! Van-e negatív megoldása ennek az egyenletnek?

Szilágyi Jutka, Kolozsvár

4. Az $ABC_\triangle$ oldalaira kifele megszerkesztjük az ABD és CAE egyenlőszárú, derékszögű háromszögeket úgy, hogy $m(\widehat{ABD}) = m(\widehat{CAE}) = 90^\circ$. Számítsd ki az $\widehat{MNP}$ mértékét, ahol M, N és P rendre az AC, AB illetve a DE felezőpontja!

András Szilárd, Kolozsvár

XI. OSZTÁLY

1. Az $A \in M_3(\mathbb{Z})$ mátrix esetén $A^3 = 2I_3$. Bizonyítsd be, hogy $\det\left(A^2 - I_3\right) = 3$.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

2. A $P \in \mathbb{Z}[X]$ harmadfokú polinomra $P(1) = 2009$, $P(2009) = 1$ és a P polinom egyik gyöke egész szám.

a) Határozd meg a P polinomnak az $X^2 - 2010X + 2009$-cel való osztási maradékát!

b) Határozd meg a P polinomot!

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

3. a) Határozd meg az $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 4x_n$, $x_0 = 2$, $x_1 = 6$ sorozat általános tagjának képletét!

b) Igazold, hogy $\left[\left(3+\sqrt{5}\right)^n\right]+1$ osztható 2^n-nel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ahol $[x]$ az x valós szám egészrészét jelöli.

Szász Róbert, Marosvásárhely

4. Az $\left(x_n\right)_{n\geq 0}$ valós számsorozat esetén $x_n\left(x_{n+1}-1\right)=1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Határozd meg a sorozat általános tagját és $x_0 \in \mathbb{R}$ azon értékeit, amelyekre a sorozat jól értelmezett!

b) Számítsd ki a sorozat határértékét!

Bencze Mihály, Brassó

XII. OSZTÁLY

1. A $(G,\cdot)$ csoportban érvényes a következő implikáció: Ha $xy^{2009} = z^{2009}x$, akkor $y = z$.

a) Igazold, hogy $(G,\cdot)$ kommutatív csoport!

b) Adj példát legalább 2009 elemű véges csoportra, amelyben teljesül az implikáció.

***

2. Lehet-e az $e^x = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ egyenletnek $(n+2)$ páronként különböző valós megoldása, ha $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$?

***

3. Bizonyítsd be, hogy ha az $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ sorozat tagjai nullától különböző természetes számok, a sorozat szigorúan növekvő és az $f:\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ függvény injektív, akkor az

$$x_n = \frac{1}{f(a_1)} + \frac{1}{f(a_1)+f(a_2)} + \ldots + \frac{1}{f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)}$$

sorozat konvergens.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

4. Adott az $y = \frac{1}{4}x^2$ egyenletű parabola. A $F(0,1)$ pontból húzott Oy-nal nem párhuzamos egyenesnek a parabolával való egyik metszéspontját jelöljük M-mel. Az M pontban a parabolához húzott érintő az Oy tengelyt N-ben metszi. Határozd meg az F pont MN-re vonatkozó szimmetrikusának mértani helyét!

András Szilárd, Kolozsvár

MEGOLDÁSOK

I. FORDULÓ

IX. OSZTÁLY

1. $x = \dfrac{y(19-y)}{y+1} \in \mathbb{N}$ és $(y, y+1) = 1 \Rightarrow (y+1)\big|(19-y) \Rightarrow$

$(y+1)\big|20$ és $y \neq 0 \Rightarrow y \in \{1,3,4,9,19\}$

A megfelelő x értékek: $9,2,12,9,0$. Tehát a megoldáshalmaz:

$\{(9,1),(12,3),(12,4),(9,9),(0,19)\}$

2. Számoljuk össze az $r \in \{1,2,\ldots,6\}$ állandó különbségű számtani sorozatokat!

3 tagú sorozatok:

$(1,1+r,1+2r)$, $(2,2+r,2+2r)$, ..., $(121-2r,121-r,121)$

4 tagú sorozatok:

$(1,1+r,1+2r,1+3r)$, $(2,2+r,2+2r,2+3r)$, ...,

$(121-3r,121-2r,121-r,121)$

...

m tagú sorozatok:

$(1,1+r,\ldots,1+(m-1)r)$, $(2,2+r,\ldots,2+(m-1)r)$, ...,

$(121-(m-1)r,121-(m-2)r,\ldots,121)$

...

$\dfrac{120}{r}$ tagú sorozat:

$(1,r+1,\ldots,121)$, (mert $120 \vdots r$, $\forall r \in \{1,2,\ldots 6\}$)

Tehát az r állandó különbségű sorozatok száma:

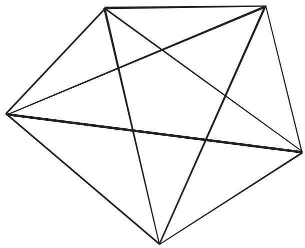
$$(121-2r)+(121-3r)+\ldots+\left(121-\left(\frac{120}{r}-1\right)r\right)+1=$$

$$=\frac{(120-r)(122-2r)}{2r}$$

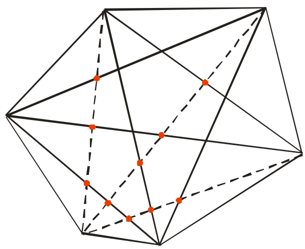
Tehát az összes keresett sorozat száma:

$$\frac{119\cdot 120}{2}+\frac{118\cdot 118}{4}+\frac{117\cdot 116}{6}+\frac{116\cdot 114}{8}+\frac{115\cdot 112}{10}+$$
$$+\frac{114\cdot 110}{12}=16869\,.$$

3. A legtöbb parcella abban az esetben keletkezik, ha minden átlót behúzunk és nincs három összefutó átló.



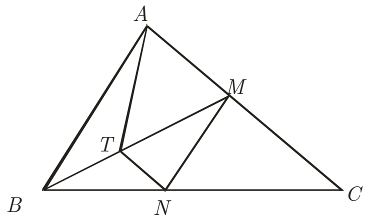
Egy konvex ötszög átlói, ha hármanként nem futnak össze, akkor 11 részre osztják az ötszöget



Konvex ötszögből konvex hatszöget kapunk, ha valamely oldalhoz (nevezzük *a*-nak) illesztünk egy háromszöget úgy, hogy az így kapott hatszög konvex legyen. Ezzel egy új parcellát kapunk. Így az új átlók nélkül 12 parcella van. Három új átlónk lesz, amelyekből kettőt az új csúcsból a két második „szomszédhoz” húzzuk, így további 2-2 átlót, illetve az eredeti ötszög *a* oldalát metszi, ezzel mindkét átló 4-gyel növeli a parcellák számát. Az ötödik csúccsal összekötve az új csúcsot, az metszi az *a* oldalt és további 3 átlót (az ötödik csúcsból induló két átló kivételével az ötszög minden átlóját metszi). Ezzel 5-tel növeli a parcellák számát. Tehát összesen 25 parcellára osztják az átlók a hatszög alakú termőföldet.

Ha minden parcellára legfeljebb 40000 magot szórnának, akkor legfeljebb 1000000 mag kerülne a termőföldre. Tehát van legalább egy parcella, amelyre legalább 40001 magot szórtak.

4.

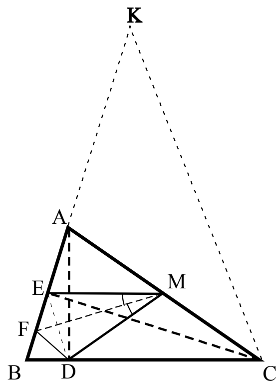


$$T_{BAT} = \frac{BT}{BM} \cdot T_{BAM} = \frac{BT}{BM} \cdot \frac{AM}{AC} \cdot T_{ABC} \overset{Th.t.}{=} \frac{BN}{BC} \cdot \frac{AM}{AC} \cdot T_{ABC} \overset{Th.t.}{=}$$

$= \left(\frac{AM}{AC}\right)^2 \cdot T_{ABC} \overset{szögf.t.}{=} \left(\frac{AB}{AB+BC}\right)^2 T_{ABC}$. Tehát $\frac{AB}{AB+BC} = \frac{3}{5}$, de $AB = p$ prímszám, így $AB = 3$ és $BC = 2$, ami szintén prímszám.

5. Az ADC és AEC derékszögű háromszögekben az átfogóra húzott oldalfelezőkre írhatjuk:

$$DM = EM = \frac{AC}{2}.$$



Az MDE egyenlő szárú háromszögben MF szögfelező és oldalfelező merőleges is (szimmetria tengely). Ha az ABC háromszög szögeinek mértékét A, B, C-vel jelöljük, akkor az *MCD* és *MAE* egyenlő szárú háromszögekben a $m\left(\widehat{CDM}\right) = C$, $m\left(\widehat{AEM}\right) = A$ és így

$m\left(\widehat{AME}\right) = 180^o - 2A$, $m\left(\widehat{CMD}\right) = 180^o - 2C$, ahonnan következik $m\left(\widehat{DMF}\right) = m\left(\widehat{EMF}\right) = 90^o - B$, $m\left(\widehat{EDM}\right) = m\left(\widehat{DEM}\right) = B$, $m\left(\widehat{EDF}\right) = m\left(\widehat{DEF}\right) = C$, $m\left(\widehat{DFM}\right) = m\left(\widehat{EFM}\right) = 90^o - C$ és $m\left(\widehat{BFD}\right) = 2C$.

Mivel $m\left(\widehat{DBF}\right)=m\left(\widehat{KBC}\right)=B$ és $m\left(\widehat{BFD}\right)=m\left(\widehat{BCK}\right)=2C$, ezért $BFD_\Delta \sim BCK_\Delta$.

5. A háromszög köré írt kör középpontját origónak tekintjük. Így $h=a+b+c$ (minden pont affixumát a megfelelő kisbetűvel jelöljük), $g_1=\dfrac{a+2b+2c}{3}$, $g_2=\dfrac{2a+b+2c}{3}$ és $g_3=\dfrac{2a+2b+c}{3}$. Így $\dfrac{1}{4}(3g_1+a)=\dfrac{1}{4}(3g_2+b)=\dfrac{1}{4}(3g_3+c)=\dfrac{a+b+c}{6}$, tehát az $\dfrac{a+b+c}{6}$ affixumú pont rajta van az AG_1, BG_2 és CG_3 egyeneseken.

b) A $G_1G_2G_3$ háromszög súlypontjának affixuma $g=\dfrac{5(a+b+c)}{9}$, tehát $G\in OH$.

6. A k-adik ugrás után a bolha helyzetét jellemző középponti szög mértéke $1+2+3+...+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$. Így a k-adik és m-edik lépés után pontosan akkor kerül ugyanabba a pontba a bolha ($m>k$), ha $\dfrac{m(m+1)}{2}-\dfrac{k(k+1)}{2}=360v$, ahol $v\in\mathbb{N}^*$. Ez ekvivalens az $(m-k)(m+k+1)=720v\left(=2^4\cdot 5\cdot 3^2\cdot v\right)$ egyenlettel. Mivel az $m-k$ és $m+k+1$ paritása nem azonos, az előbbi egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $(m-k)\vdots 16$ vagy $(m+k+1)\vdots 16$. Mivel $m>k$ és a legkisebb megoldást keressük, az $\begin{cases} m-k=16 \\ m+k+1=45\end{cases}$ és $\begin{cases} m-k=15 \\ m+k+1=48\end{cases}$ rendszereket érdemes megvizsgálni. Az első esetben $m=30$ és $k=14$, míg a második esetben $m=31$ és $k=16$. Látható tehát, hogy $m=30$ a kisebb megoldás, tehát a bolha 30 ugrás után kerül először olyan pontba, amit már korábban is érintett.

X. OSZTÁLY

1. Ha $p=3$, akkor $q^3=16^3-2765=1331$, ahonnan $q=11$, tehát $p=3$, $q=11$ megoldás.

Ha $p>3$, akkor $p=3k+1$ vagy $p=3k+2$, így

$16^p=8^p\cdot 2^p=2^{3p}\cdot 2^p=2^{3p}\cdot 2^{3k+1}=2\cdot(7+1)^p(7+1)^k=$

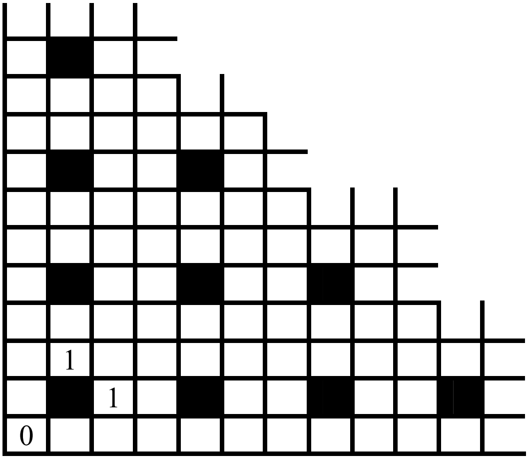
$=2\cdot(7l+1)(7l+1)=2\cdot(7l+1)=7l+2$ vagy

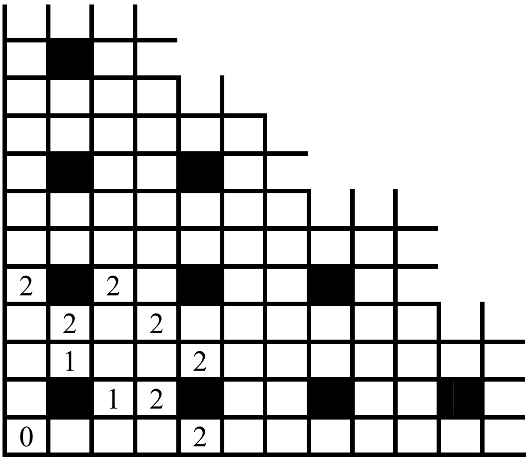
$16^p=2^{3p}\cdot 2^{3k+2}=4\cdot(7+1)^p\cdot(7+1)^k=4\cdot(7l+1)=7l+4$. Tehát, ha $p>3$, akkor $16^p\equiv 2(\bmod 7)$ vagy $16^p=4(\bmod 7)$.

Másrészt $2765=395\cdot 7$, így $2765\equiv 0(\bmod 7)$ és mivel q-nak 7-tel való osztási maradékai $1,2,3,4,5,6$ lehetnek, a $q^3\equiv 1(\bmod 7)$ vagy $q^3\equiv 6(\bmod 7)$, így $2765+q^3\equiv 1(\bmod 7)$ vagy $2765+q^3\equiv 6(\bmod 7)$.

Tehát a jobb és a bal oldalnak héttel való osztási maradékai nem egyenlők, így ha $p>3$ az egyenletnek nincs megoldása.

2. A tábla bal alsó sarkából indulva írjuk minden szabad mezőbe azt a lépésszámot, amelyben a huszár leggyorsabban eljuthat oda (lásd az alábbi ábrákat). A táblát kitöltve észrevehető, hogy a főátló mentén a $4,2,4,4,6,6,8,8,10,10,\ldots$ számok jelennek meg. Belátható, hogy a jobb felső sarokban, azaz a $(3n,3n)$ mezőben a $2n$ szám szerepel minden $n\geq 2$ esetén, hiszen bármely $1<i<n$ esetén $(3i,3i)$ mezőből a $(3i+3,3i+3)$ mezőbe 2 lépésben juthatunk el: $(3i,3i)\to(3i+2,3i+1)\to(3i+3,3i+3)$. Tehát $n=1$ esetén legkevesebb 4, míg $n\geq 2$ esetén legkevesebb $2n$ lépés szükséges a jobb felső sarokba való eljutáshoz.

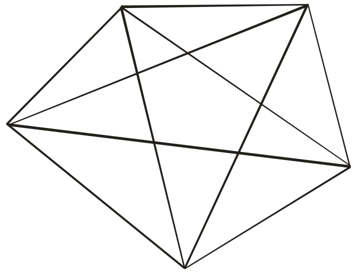

1
1
0


2 2
2 2
1 2
1 2
0 2

	3		3								
3		3		3							
2		2	3		3						
3	2	3	2	3		3					
	1		3	2	3						
3		1	2			3					
0	3		3	2	3						

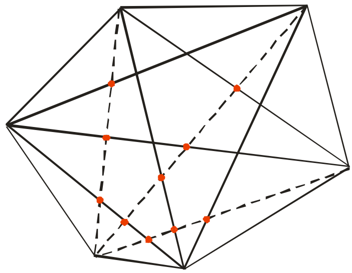
7	6	7	6	7	6	7	6	7	8	7	8
6		6	5		5	6		6	7		7
5	6	5	6	5	6	5	6	7	6	7	8
4	5	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7
5		5	4		4	5		5	6		6
4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6	7
3	4	3	4	3	4	5	4	5	6	5	6
2		2	3		3	4		4	5		7
3	2	3	2	3	4	3	4	5	6	5	6
4	1	4	3	2	3	4	5	4	5	6	7
3		1	2		4	3		5	6		6
0	3	4	3	2	3	4	5	4	5	6	7

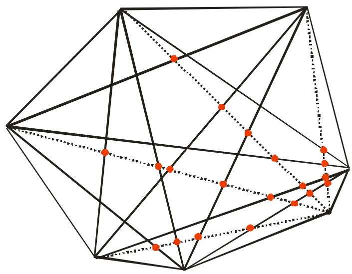
3. Először igazoljuk, hogy egy konvex hatszög átlói legfeljebb 25 részre osztják a hatszöget. A parcellák száma abban az esetben a legnagyobb, ha nincs három összefutó átló.



Egy konvex ötszög átlói, ha hármanként nem futnak össze, akkor 11 részre osztják az ötszöget

Konvex ötszögből konvex hatszöget kapunk, ha valamely oldalhoz (nevezzük *a*-nak) illesztünk egy háromszöget úgy, hogy az így kapott hatszög konvex legyen. Ezzel egy új parcellát kapunk. Így az új átlók nélkül 12 parcella van. Három új átlónk lesz, amelyekből kettőt az új csúcsból a két második „szomszédhoz" húzzuk, így további 2-2 átlót, illetve az eredeti ötszög *a* oldalát metszi, ezzel mindkét átló 4-gyel növeli a parcellák számát. Az ötödik csúccsal összekötve az új csúcsot, az metszi az *a* oldalt és további 3 átlót (az ötödik csúcsból induló két átló kivételével az ötszög minden átlóját metszi). Ezzel 5-tel növeli a parcellák számát. Tehát összesen 25 részre osztják az átlók a hatszöget.





Konvex hatszögből konvex hétszöget kapunk, ha valamely oldalhoz (nevezzük *b*-nek) illesztünk egy háromszöget úgy, hogy az így kapott hétszög konvex legyen. Ezzel egy új parcellát

kapunk. Így az új átlók nélkül 26 parcella van. Négy új átlónk lesz, amelyekből kettőt az új csúcsból a két második „szomszédhoz" húzzuk, így további 3-3 átlót, illetve az eredeti hatszög b oldalát metszi, ezzel mindkét átló 5-tel növeli a parcellák számát. A másik két csúccsal összekötve az új csúcsot, azok metszik a b oldalt és további 5 átlót. Ezzel mindkét átló 7-tel növeli a parcellák számát.
Tehát összesen 25 parcellára osztják az átlók a hétszög alakú termőföldet.

Ha minden parcellára legfeljebb 40000 magot szórnának, akkor legfeljebb 2000000 mag kerülne a termőföldre. Tehát van legalább egy parcella, amelyre legalább 40001 magot szórtak.

4. Tekintsünk az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ hatszög belsejében egy M pontot, és kössük össze a hatszög csúcsival. Az M pont körül keletkező szögek között biztos lesz 60°-osnál nagyobb mértékű, legyen ez például $\widehat{A_2MA_3}$ (lásd a mellékelt ábrát). Mivel $m(A_2M_2A_3) = 120^\circ$ és $m(\widehat{A_2MA_3}) > 60^\circ$, ezért az M pont az $A_2M_2A_3$ háromszög köré írt kör belsejében helyezkedik el. Mivel bármelyik M belső pont esetén keletkezik 60°-osnál nagyobb mértékű szög, amely a megfelelő kör belsejében lesz, ezért a körlapok lefedik a hatszöget. Szabályos hatszög esetén a középpont éppen a körök metszéspontja lesz.
Megjegyzés: A feladat általánosítható n-szögekre. Ekkor $m(\widehat{A_iM_iA_{i+1}}) = \dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$, és az $A_iM_iA_{i+1}$ háromszögek köré írt körök lefedik az n-szöget.

5. Először kiszámoljuk, hogy $BD = 2$ és $DC = 4$ (a Heron-képlettel kiszámoljuk az ABC háromszög területét ($6\sqrt{6}$), majd az A-ból húzott magasságot ($h = 2\sqrt{6}$) és a Pitagorász tételével $BD = 2\sqrt{AB^2 - h^2} = 2$; vagy dolgozhatunk a Stewart-tétellel)

Felírjuk az ABD háromszögbe írt kör I középpontjának helyzetvektorát: $\overrightarrow{AI}=\dfrac{5\cdot\overrightarrow{AB}+5\cdot\overrightarrow{AD}}{2+5+5}$ és tudjuk, hogy D a *(BC)* szakaszt $\dfrac{1}{2}$ arányban osztja: $\overrightarrow{AD}=\dfrac{2\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$, tehát $\overrightarrow{AI}=\dfrac{25\cdot\overrightarrow{AB}+5\cdot\overrightarrow{AC}}{36}$.

Felírjuk az *ADC* háromszög *G* súlypontjának a helyzetvektorát: $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{3}$, behelyettesítjük a $\overrightarrow{AD}$ vektort és kapjuk: $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2\cdot\overrightarrow{AB}+4\cdot\overrightarrow{AC}}{9}$. Tudjuk, hogy $\overrightarrow{AE}=\dfrac{10}{17}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Ezek alapján:

$$\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AI}=\frac{-17\cdot\overrightarrow{AB}+11\cdot\overrightarrow{AC}}{36}$$

és $$\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AG}=\frac{-34\cdot\overrightarrow{AB}+22\cdot\overrightarrow{AC}}{9\cdot 17},$$

ahonnan $\overrightarrow{IG}=\dfrac{17}{8}\cdot\overrightarrow{GE}$, tehát *I, G, E* egy egyenesen elhelyezkedő pontok.

6. k-szerinti indukciót alkalmazunk. Mivel

$$\sqrt{x+2}<\sqrt{2+\frac{1}{n}+2}=\sqrt{4+\frac{1}{n}}<2+\frac{1}{n+1} \text{ és}$$

$$\sqrt{2+x}>\sqrt{4-\frac{1}{n}}>2-\frac{1}{n+1} \text{ ezért}$$

$2-\dfrac{1}{n+1}<\sqrt{2+x}<2+\dfrac{1}{n+1}$, tehát $k=1$-re igaz.

Feltételezzük, hogy igaz k-ig, azaz

$$2-\frac{1}{n+k}<\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+x}}}}_{k-szor}<2+\frac{1}{n+k}.$$

Bizonyítjuk $(k+1)$ -re. Legyen $t=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+x}}}}_{k-szor}$, ekkor

$2-\dfrac{1}{n+k}<t<2+\dfrac{1}{n+k}$. Alkalmazva az első esetet

$2-\dfrac{1}{n+k+1}<\sqrt{2+t}<2+\dfrac{1}{n+k+1}$, azaz

$2-\dfrac{1}{n+k+1}<\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2+x}}}}_{(k+1)-szer}<2+\dfrac{1}{n+k+1}$. Ezzel

állításunkat igazoltuk.

XI. ÉS XII. OSZTÁLY

1. A k-adik ugrás után a bolha helyzetét jellemző középponti szög mértéke $1+2+2^2+...+2^{k-1}=2^k-1$. Így a k-adik és m-edik lépés után pontosan akkor kerül ugyanabba a pontba a bolha ($m>k$), ha $(2^m-1)-(2^k-1)=360v$, ahol $v\in\mathbb{N}^*$.

Tehát $2^k\left(2^{m-k}-1\right)=2^3\cdot5\cdot3^2\cdot v$. Így $k=3$ és $m-k$ legkiseb értéke az a p szám, amelyre az előbbi egyenlőség csak akkor teljesülhet, ha $(m-k)\vdots16$ vagy $(2^p-1)\vdots45$.

$(2^p-1)\vdots9 \Leftrightarrow p\vdots6$ és $(2^p-1)\vdots5 \Leftrightarrow p\vdots4$. Tehát a legkisebb p érték 12. Így $k=3$ és $m=15$.

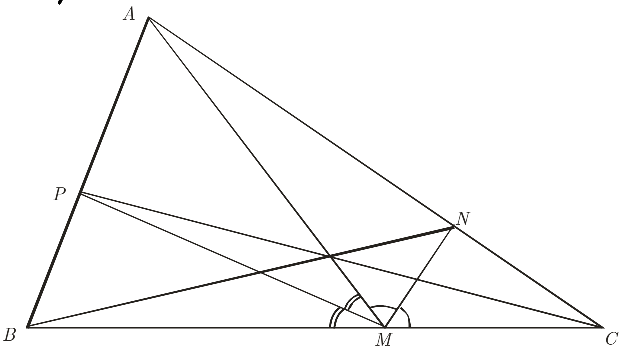
2. a) Az adott feltételeket teljesítő (x,y) számpároknak megfelelő $M(x,y)$ pontok rácspontok, a $[0,n]\times[0,n]$ négyzet belsejében vagy az oldalain helyezkednek el az $y=n+1-x$ egyenesen vagy fölötte. Az ilyen rácspontok száma $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ (a négyzet átlójával párhuzamos egyenesek szerint csoportosítva a pontokat).

b) Ha x és y két párt szavazatainak a száma, akkor a harmadik pártnak $2009-x-y$ szavazata van. Az adott feltétel az $x+y>2009-x-y$, $x+2009-x-y>y$ és $y+2009-x-y>x$ egyenlőtlenségeket jelenti. Így az $x+y\geq1005$, $x\leq1004$ és $y\leq1004$ egyenlőtlenségekhez jutunk. Az a) alpont alapján $\dfrac{1004\cdot1005}{2}=502\cdot1005$ lehetséges eredmény jöhet létre.

3. Egy természetes számnak és 2009-ik hatványának 3-mal való osztási maradéka ugyanaz.
Egy törlés után nem változik a számok összegének 3-mal való osztási maradéka, ugyanis az új összeg és az előző közötti különbség.

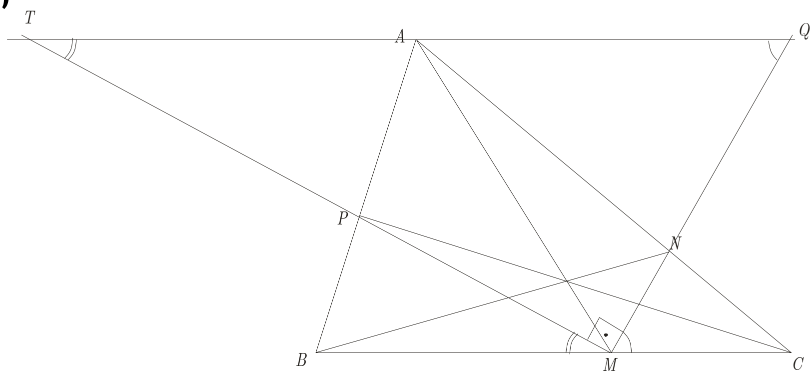
$a^{2009}+b^{2009}+c^{2009}-3a^{2009}-a-b-c$, ami osztható 3-mal. Így a számok összegének 3-mal való osztási maradéka nem változik. Az eredetileg táblán levő számok összege $50\cdot 101$, ennek 3-mal való osztási maradéka 1. A $2009^{2009}-2008^{2009}+1001^{2009}-1000^{2009}$ összeg 3-mal való osztási maradéka 2. Tehát nem lehetséges, hogy ez a két szám maradjon a táblán.

4. a)



A szögfelező tétele alapján az AMB és AMC háromszögekben, kapjuk : $\frac{AP}{PB}=\frac{AM}{BM}$ és $\frac{CN}{NA}=\frac{CM}{AM}$. Így $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}=\frac{AM}{BM}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CM}{AM}=1$, ahonnan Ceva tételének fordított tétele alapján következik, hogy AM, CP és BM összefutók.

b)



Legyen T és Q az A ponton át a BC egyenessel húzott párhuzamos metszéspontja a PM, illetve MN egyenessel.

Ceva tétele alapján $\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}=1$

$BPM_\Delta \sim APT_\Delta$ és $MNC_\Delta \sim QNA_\Delta$ $\Rightarrow$ $\frac{AP}{PB}=\frac{AT}{BM}$ és $\frac{CN}{NA}=\frac{CM}{AQ}$.

Így $\frac{AT}{BM}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CM}{AQ}=1 \Rightarrow AT=AQ$. Tehát az MTQ derékszögű háromszögben MA oldalfelező $\Rightarrow$ $MA=AT=AQ$ $\Rightarrow$ MAT_Δ egyenlőszárú $\Rightarrow$ $m\left(\widehat{AMT}\right)=m\left(\widehat{T}\right)$, ugyanakkor $m\left(\widehat{BMP}\right)=m\left(\widehat{T}\right)$, tehát MP az $\widehat{AMB}$ szögfelezője. Hasonlóan MN az $\widehat{AMC}$ szögfelezője.

5. A háromszög köré írt kör középpontját origónak tekintjük. Így $h=a+b+c$ (minden pont affixumát a megfelelő kisbetűvel jelöljük), $g_1=\frac{a+2b+2c}{3}$, $g_2=\frac{2a+b+2c}{3}$ és $g_3=\frac{2a+2b+c}{3}$. Így $\frac{1}{4}(3g_1+a)=\frac{1}{4}(3g_2+b)=\frac{1}{4}(3g_3+c)=\frac{a+b+c}{6}$, tehát az $\frac{a+b+c}{6}$ affixumú pont rajta van az AG_1, BG_2 és CG_3 egyeneseken.

b) A $G_1G_2G_3$ háromszög súlypontjának affixuma $g=\frac{5(a+b+c)}{9}$, tehát $G\in OH$.

6. a) Ha a feladatbeli egyenlőségben $x\to x-a$ és $y\to y+a$ helyettesítéseket végezzük, akkor az $\left[f^3(x+y)\right]=\left[f^3(x)\right]+\left[f^3(y)\right]$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ egyenlőséghez jutunk.

b) A $g:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$, $g(x)=\left[f^3(x)\right]$ függvény esetén

$g(x+y)=g(x)+g(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$. Matematikai indukcióval igazolható, hogy $g(nx)=ng(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $g(x)=ng\left(\frac{x}{n}\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, tehát $n|g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $g(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Így $\left[f^3(x)\right]=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f^3(x)\in[0,1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f(x)\in[0,1)$, $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f^2(x)\leq f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f^2(x)\leq f(x)+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

II. forduló

IX. OSZTÁLY

1. A számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenség alapján $(x_1+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)\geq n^2 \Rightarrow n^2\leq 4n-4 \Rightarrow (n-2)^2\leq 0$ $\Rightarrow n=2$. Tehát $x_1+x_2=4$ és $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1 \Rightarrow x_1>1$ és $x_2>1$ és csak az $x_1=x_2=2$ teljesíti a feltételeket.

2. $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)^2}=$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=n+1-\frac{1}{n+1}$$

3. $\sum_{i=1}^{n}a_ia_{n-i+1}=\sum_{i=1}^{n}(a_1+(i-1)r)(a_1+(n-i)r)=$

$$=na_1^2+n(n-1)a_1r+\left(-n^2+(n+1)\sum_{i=1}^{n}i-\sum_{i=1}^{n}i^2\right)r^2=$$

$$=na_1^2+n(n-1)a_1r+\left(-n^2+\frac{n(n+1)^2}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)r^2=$$

$$=na_1^2+n(n-1)a_1r+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}r^2$$

$$na_ka_{n-k+1}=n(a_1+(k-1)r)(a_1+(n-k)r)=$$

$$=na_1^2+n(n-1)a_1r+n\left(-k^2+(n+1)k-n\right)r^2$$

Tehát az a kérdés, hogy milyen $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ értékekre áll fenn az

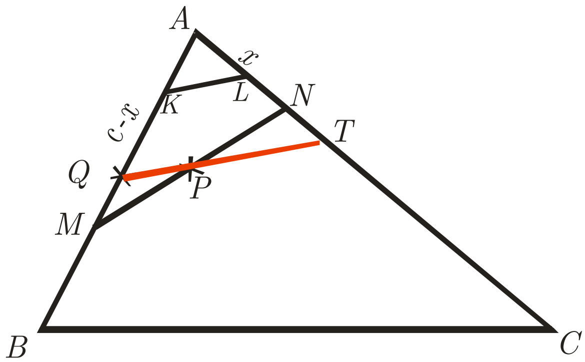
$$\frac{(n-1)(n-2)}{6}\leq -k^2+(n+1)k-n$$

egyenlőtlenség. Ennek az egyenlőtlenségnek a megoldásai a valós számok halmazán

$$\left[\frac{1}{2}\left(n+1-\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}\right), \frac{1}{2}\left(n+1+\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}\right)\right],$$

de $\frac{1}{2}\left(n+1-\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}\right) > 0$ és $\frac{1}{2}\left(n+1-\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}\right) < n$, tehát

$$k \in \left[\frac{1}{2}\left(n+1-\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}\right), \frac{1}{2}\left(n+1+\sqrt{\frac{n^2-1}{3}}\right)\right] \cap \mathbb{N}.$$



4. Legyen $AB = c$, $AC = b$ és $AN = x \in [0, c]$, ekkor $\overrightarrow{AM} = \frac{c-x}{c}\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AM} = \frac{x}{b}\overrightarrow{AC}$. Tehát $\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \frac{x}{2}\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{b} - \frac{\overrightarrow{AB}}{c}\right)$

Ha $K \in (AB$ és $L \in (AC$ úgy, hogy $\overrightarrow{AK}$ és $\overrightarrow{AL}$ egységnyi hosszúságú vektorok, akkor $\frac{\overrightarrow{AC}}{b} = \overrightarrow{AL}$ és $\frac{\overrightarrow{AB}}{c} = \overrightarrow{AK}$, így $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \frac{x}{2}\overrightarrow{KL} \Rightarrow \overrightarrow{QP} = \frac{x}{2}\overrightarrow{KL}$ ahol Q az $[AB]$ szakasz felezőpontja. Tehát P a Q ponton át a KL egyenessel húzott párhuzamoson van. $x = 0$ esetén $\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$, tehát $P = Q$ és $x = c$

esetén $\overrightarrow{AP} = \dfrac{c\overrightarrow{AC}}{2b}$, tehát $P \in AC$. Tehát a P pont mértani helye a $[QT]$ szakasz, ahol T a Q ponton át a KL egyenessel húzott párhuzamos és az AC oldal metszéspontja.

X. OSZTÁLY

1. Logaritmáljuk az első összefüggést:

$$\log_2 x_1 + \log_2 x_2 + ... + \log_2 x_n = 3,$$

majd az $(a_1 + a_2 + ... + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$ pozitív számok

közötti egyenlőtlenséget alkalmazzuk, ahonnan $n^2 \leq 9 \Rightarrow n \in \{1,2,3\}$

feltételt kapjuk. $n = 1$ esetben az $\begin{cases} x_1 = 8 \\ \log_{x_1} 2 = 3 \end{cases}$ egyenletrendszer nem

összeférhető.

$n = 2$ esetben $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 8 \\ \log_{x_1} 2 + \log_{x_2} 2 = 3 \end{cases}$ megoldásai:

$\{x_1, x_2\} = \left\{2^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, 2^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right\}$.

$n = 3$ esetben $\begin{cases} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 8 \\ \log_{x_1} 2 + \log_{x_2} 2 + \log_{x_3} 2 = 3 \end{cases}$ megoldása:

$x_1 = x_2 = x_3 = 2$.

2. A $g(x) = f(x) - x$ függvényre $2007g(f(x)) = 2g(x)$. Ha $y \in \mathbb{Z}$ rögzített értelmezhetjük a következő sorozatot: $x_0 = y$, $f(x_0) = x_1$ és általában $x_n = f(x_{n-1})$. Ezek alapján $g(x_0) = \frac{2007}{2} g(x_1) = ... = \frac{2007^n}{2^n} g(x_n)$, vagyis $2007^n g(x_n) = 2^n g(x_0)$. Ebből 2007^n osztja $g(x_0)$-t minden n-re, tehát $g(x_0) = 0$. Ez alapján a függvényegyenlet megoldása $f(y) = y$.

3. $\forall\, x > 0$-ra $x + \frac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} \geq 2 \Rightarrow \frac{x^2+1}{4x} \geq \frac{1}{2}$. Másrészt a 2^x függvény szigorúan növekvő, amiből következik, hogy $2^{\frac{x^2+1}{4x}} \geq 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, $\forall\, x > 0$-ra.

$$\cos\frac{\pi x}{4} + \sin\frac{\pi x}{4} = \cos\frac{\pi x}{4} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{4}\right) =$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\frac{\pi(x-1)}{4} \leq \sqrt{2},\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+\text{-ra.}$$

Így $2^{\frac{x^2+1}{4x}} = \cos\frac{\pi x}{4} + \sin\frac{\pi x}{4}$ csak akkor, ha

$2^{\frac{x^2+1}{4x}} = \sqrt{2} = \cos\frac{\pi x}{4} + \sin\frac{\pi x}{4}$, azaz csak ha $\begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2 \\ \cos\frac{\pi(x-1)}{4} = 1 \end{cases}$,

ahonnan következik, hogy $x = 1$ az egyetlen megoldás.

Ha $x < 0$, akkor $\frac{x^2+1}{4x} \leq -\frac{1}{2}$, tehát $2^{\frac{x^2+1}{4x}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Így a bal oldal a $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ intervallumban változik és növekvő. A jobb oldal a $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ intervallumban periodikusan változik, tehát az egyenletnek végtelen sok negatív megoldása van.

4. Az A pontot tekintjük origónak, a B és C pont affixumát jelöljük b illetve c-vel (minden pont affixumát a megfelelő kis betűvel jelöljük). Így $e = ic$ és $d - b = -ib$, tehát $m = \frac{c}{2}$, $n = \frac{b}{2}$ és $p = \frac{b - ib + ic}{2}$. Ez alapján $m - n = \frac{c-b}{2}$ és $p - n = i\frac{c-b}{2}$, tehát $MN \perp PN$ és $MN = NP$. Az $m\left(\widehat{MNP}\right) = 90^\circ$.

XI. OSZTÁLY

1. $A^3 = 2I_3 \Rightarrow A^3 - I_3 = I_3 \Rightarrow (A - I_3)(A^2 + A + I_3) = I_3$.

Következik, hogy

$$\det(A - I_3)\det(A^2 + A + I_3) = 1,$$

ahol $\det(A - I_3) \in \mathbb{Z}$, $\det(A^2 + A + I_3) \in \mathbb{Z}$ és

$$\det(A^2 + A + I_3) = \det\left[\left(A + \frac{1}{2}I_3\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}I_3\right)^2\right] \geq 0,$$

ezért innen következik, hogy

$$\det(A - I_3) = 1 \text{ és} \qquad (1)$$

Mivel $(A + I_3)^3 = A^3 + I_3 + 3A(A + I_3)$ és $A^3 = 2I_3$, ezért

$$(A + I_3)^3 = 3I_3 + 3A(A + I_3) = 3(A^2 + A + I_3),$$

és (1) alapján innen következik, hogy

$$[\det(A + I_3)]^3 = 3^3 \det(A^2 + A + I_3) = 3^3,$$

tehát

$$\det(A + I_3) = 3$$

és így $\det(A^2 - I_3) = \det(A - I_3)\det(A + I_3) = 3$.

Megjegyzés. Létezik olyan mátrix , mely teljesíti a feladat feltételeit, például

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -10 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. a) A maradékos osztás tétele alapján

$$P(X) = (X - 1)(X - 2009)Q(X) + AX + B,$$

ahol Q elsőfokú polinom. Az osztási algoritmus elvégzési módjából következik, hogy Q együtthatói, valamint A és B egész számok. Az első két feltételből következik, hogy $A + B = 2009$ és $2009A + B = 1$. Innen $A = -1$, $B = 2010$. Megjegyzendő, hogy ha ezekre nem kaptunk volna egész számokat, akkor a feladatnak nem lett volna megoldása. Következik, hogy

$$P(X) = (X-1)(X-2009)Q(X) - X + 2010\,.$$

b) Legyen x a P egész gyöke. Így $(x-2009)\left[(x-1)Q(x)-1\right] = -1$, ahol a szorzótényezők egész számok, tehát csak két eset lehetséges.

Az egyik lehetőség: $x-2009=-1$, $(x-1)Q(x)-1=1$, amiből következik, hogy $x=2008$ és $2007Q(2008)=2$, amely lehetetlen, mert 2 nem osztható 2007 -tel.

A másik lehetőség: $x-2009=1$, $(x-1)Q(x)-1=-1$. Ebben az esetben $x=2010$ és $Q(2010)=0$. Mivel Q egész együtthatójú elsőfokú polinom, a második egyenlőségből következik, hogy $Q(X)=m(X-2010)$, ahol $m \neq 0$ egész szám. Így

$$P(X) = m(X-1)(X-2009)(X-2010) - X + 2010\,.$$

3. a) A karakterisztikus egyenlet $r^2-6r+4=0$. A gyökök $r_{1,2} = 3 \pm \sqrt{5}$, tehát

$x_n = c_1(3+\sqrt{5})^n + c_2(3-\sqrt{5})^n$. Az $x_0=2$ és $x_1=6$ feltételből az $x_n = (3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ alakhoz jutunk.

b) $0 < 3-\sqrt{5} < 1$, $x_n \in \mathbb{Z}$ alapján írhatjuk, hogy

$[(3+\sqrt{5})^n]+1 = x_n$, tehát azt kell igazolni, hogy $x_n \,\vdots\, 2^n, \forall\, n \geq 0$. Ezt matematikai indukcióval igazoljuk:

$n=0$ esetén $x_0 = 2 \,\vdots\, 1$

$n=1$ esetén $x_1 = 6 \,\vdots\, 2$.

Feltételezzük, hogy $x_k \,\vdots\, 2^k, \forall k \leq n$. Így

$x_{n+2} = 6x_{n+1} - 4x_n = 3(2x_{n+1}) - 2^2 x_n$ és ez osztható 2^{n+2} -vel. A matematikai indukció elve alapján $x_n \,\vdots\, 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

4. a) Az $x_n(x_{n+1}-1)=1$ összefüggésből $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Tehát $x_1 = \dfrac{x_0+1}{x_0}$, $x_2 = \dfrac{x_1+1}{x_1} = \dfrac{\dfrac{x_0+1}{x_0}+1}{\dfrac{x_0+1}{x_0}} = \dfrac{2x_0+1}{x_0+1}$,

$x_3 = \dfrac{3x_0+2}{2x_0+1}$, $x_4 = \dfrac{5x_0+3}{3x_0+2}$, $x_5 = \dfrac{8x_0+5}{5x_0+3}$. Észrevehetjük, hogy $x_n = \dfrac{F_{n+1}x_0+F_n}{F_nx_0+F_{n-1}}$, $\forall n \geq 2$, ahol $(F_n)_{n\geq 0}$ a Fibonacci sorozat (ez indukcióval igazolható). Tehát a sorozat pontosan akkor értelmezhető, ha $x_0 \neq -\dfrac{F_{n-1}}{F_n}$, $n \geq 0$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}x_0+F_n}{F_nx_0+F_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_n}{F_{n-1}} \dfrac{\dfrac{F_{n+1}}{F_n}x_0+1}{\dfrac{F_n}{F_{n-1}}x_0+1}$. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_n}{F_{n-1}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, az előbbi határérték $x_0 \neq -\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$x_0 = -\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$ esetén a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{F_{n+1}}{F_n}x_0+1}{\dfrac{F_n}{F_{n-1}}x_0+1}$ határértékre alkalmazzuk a Cesaro-Stolz kritériumot. E célból kiszámítjuk a $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{F_{n+1}}{F_n}-\dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}}}{\dfrac{F_n}{F_{n-1}}-\dfrac{F_{n+1}}{F_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}^2-F_nF_{n+2}}{F_n^2-F_{n-1}F_{n+1}} = -1$ határértéket (ennek kiszámítására használjuk az $F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^n$ egyenlőséget). Így $x_0 = -\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

XII. OSZTÁLY

1. Tetszőleges $x, y \in G$ esetén az $y \to yx$ és $z \to xy$ helyettesítésekkel

$$x(yx)^{2009} = \underbrace{xyxy\dots xyx}_{4019} = (xy)^{2009}x$$

tehát a feltétel alapján $xy = yx$.
A 2010-ed rendű egységgyökök csoportja teljesíti a feltételt.

2. Ha az adott egyenletnek van legalább $(n+2)$ különböző gyöke, akkor a Rolle tétel alapján az $f(x) = e^x - a_n x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_0$ függvény deriváltjának van legalább $(n+1)$ páronként különböző gyöke. Így az f'' függvénynek van legalább n páronként különböző gyöke és így tovább. Tehát az $f^{(n+1)}$ függvénynek is van legalább egy gyöke. Ez viszont ellentmondás, mert $f^{(n+1)}(x) = e^x$.

3. Mivel f injektív és $f(x) \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{N}^*$

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Így $x_n \leq 1 + \frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{2}{n(n+1)} < 3$, tehát az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozat felülről korlátos. Az értelmezése alapján látható, hogy növekvő is, tehát a sorozat konvergens.

4. Az (x_0, y_0) pontban húzott érintő egyenlete
$e: \left(y - \frac{1}{4}x_0^2\right) = \frac{1}{2}x_0\left(x - x_0\right)$. Az F-ből erre húzott merőleges egyenlete $d: (y-1) = \frac{-2}{x_0}x$, tehát ha $M(x_1, y_1)$ az F vetülete az érintőre, akkor $x_1 = \dfrac{2x_0 + \frac{1}{2}x_0^3}{x_0^2 + 4}$ és $y_1 = 0$. Így az F-nek a d szerinti

szimmetrikusa rajta van az $y = -1$ egyenletű egyenesen. Ugyanakkor az x_1 értékkészlete az egész $\mathbb{R}$ és így a mértani hely a teljes $y = -1$ egyenletű egyenes.

Megjegyzés. A parabola értelmezése és az optikai tulajdonsága alapján számolás nélkül is azonnal belátható, hogy az F -nek a d szerinti szimmetrikusa a parabola vezéregyenesén van.

IX. OSZTÁLY

Bordi Eszter	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Budai Kinga	*Nagy Mózes Elméleti Líceum*	*Kézdivásárhely*
Cseh Júlia	*Nagy Mózes Elméleti Líceum*	*Kézdivásárhely*
Deák Norbert	*Báthory István Elméleti Líceum*	*Kolozsvár*
Demény Dávid	*Tamási Áron Elméleti Líceum*	*Székelyudvarhely*
Dobai Gábor	*Tamási Áron Elméleti Líceum*	*Székelyudvarhely*
Farkas Domokos	*Baróti Szabó Dávid Iskolacsoport*	*Barót*
Fülöp Balogh Beátrix	*Báthory István Elméleti Líceum*	*Kolozsvár*
German- Salló Zsófia	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Gilyen Hunor	*János Zsigmond Unitárius Kollégium*	*Kolozsvár*
György Szabolcs	*Mihai Eminescu*	*Sepsiszentgyörgy*
Halász Hajnalka	*Mihai Eminescu*	*Sepsiszentgyörgy*
Jakobi Zsuzsanna	*Ady Endre Elmeleti Liceum*	*Sepsiszentgyörgy*
Kegyes Krisztina	*Báthory István Elméleti Líceum*	*Kolozsvár*
Kémenes Endre	*Salamon Ernő Gimnázium*	*Arad*
Kerestély Árpád	*Áprily Lajos Főgimnázium*	*Sepsiszentgyörgy*
Kilyén Nándor-Alpár	*Székely Mikó Kollégium*	*Sepsiszentgyörgy*
Koman Zsombor	*Áprily Lajos Főgimnázium*	*Sepsiszentgyörgy*
Kurunczi-Papp Kondrád	*Csiky Gergely Iskolacsoport*	*Sepsiszentgyörgy*
Kúti-Kreszács Mátyás	*Octavian GogaFőgimnázium*	*Arad*
Lakatos Tamás	*Kölcsey Ferenc Főgimnázium*	*Arad*
Lázár Zsolt	*Tamási Áron Elméleti Líceum*	*Székelyudvarhely*
Mester Ágnes	*Székely Mikó Kollégium*	*Sepsiszentgyörgy*
Miklós Erik	*Nagy Mózes Elméleti Líceum*	*Kézdivásárhely*
Móritz Sándor	*Silvania Főgimnázium*	*Sepsiszentgyörgy*
Nagy Tamás	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Páll Tamás	*Tamási Áron Elméleti Líceum*	*Székelyudvarhely*
Péter Emőke	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Pisak Lukáts Borbála	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Porsche Endre	*Tamási Áron Elméleti Líceum*	*Székelyudvarhely*

Sajtos István	*Kölcsey Ferenc Főgimnázium*	*Szatmárnémeti*
Sandy Endre Kristóf	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Saszet Kata	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Szabó Zsolt	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Szabó-Györke István	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Szántó Zoltán-György	*Bartók Béla Elméleti Líceum*	*Temesvár*
Szász Attila	*Salamon Ernő Gimnázium*	*Sepsiszentgyörgy*
Szederjesi Arnold	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Szika Ottó Zsolt	*Németh László Elméleti Líceum*	*Arad*
Tomos Réka	*Áprily Lajos Főgimnázium*	*Sepsiszentgyörgy*
Tóth Evelyn	*Csiky Gergely Iskolacsoport*	*Sepsiszentgyörgy*
Vámos Timea-Imelda	*Csiky Gergely Iskolacsoport*	*Sepsiszentgyörgy*
Vass Gergely	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*

X. OSZTÁLY

Aczél Andrea	*Székely Mikó Kollégium*	*Arad*
Antal Enikő	*Áprily Lajos Főgimnázium*	*Nagyvárad*
Balázs Norbert Mihály	*Arany János Főgimnázium*	*Nagyvárad*
Bartalis Szilárd	*Salamon Ernő Gimnázium*	*Zilah*
Bartos Júlia	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Bekő Timea	*Mikes Kelemen Főgimnázium*	*Zilah*
Benedek Annabella	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Bogosi Réka	*Ady Endre Elmeleti Liceum*	*Nagyvarad*
Bondici László	*Kölcsey Ferenc Főgimnázium*	*Szatmárnémeti*
Borsos Zalan	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Brassai Beáta	*Tamási Áron Elméleti Líceum*	*Székelyudvarhely*
Csiki Timea	*Tamási Áron Elméleti Líceum*	*Székelyudvarhely*
Csiszér Ágnes	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Csorvasi Arnold	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Dávid Erika	*Tamási Áron Elméleti Líceum*	*Székelyudvarhely*
Dénes Károly	*Ady Endre Elmeleti Liceum*	*Nagyvarad*
Durugy Ákos	*Báthory István Elméleti Líceum*	*Kolozsvár*
Farczádi Albert	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Fazekas Norbert	*Mihai Eminescu*	*Nagyvarad*
Fehér Áron	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Forró Timea	*Nagy Mózes Elméleti Líceum*	*Kézdivásárhely*
Gábor Szabolcs-László	*Salamon Ernő Gimnázium*	*Zilah*
Grecu Marius Iustin	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Guba Anett	*Ady Endre Elmeleti Liceum*	*Nagyvarad*
Hamar Beáta	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Héjja Rudolf	*Székely Mikó Kollégium*	*Nagyvarad*
Illyés Attila	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Incze Zoltán	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Kulik Árpád	*Németh László Elméleti Líceum*	*Nagyszalonta*
László Alma	*Silvania Főgimnázium*	*Nagyvarad*

Lőrinczi Ábel	*Mikes Kelemen Főgimnázium*	*Szekelyhid*
Major Lajos-Attila	*Petőfi Sándor Elmeleti Liceum*	*Nagyvarad*
Marton Sándor	*Ady Endre Elmeleti Liceum*	*Nagyvarad*
Máté Ákos	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Nagy Zoltán	*Tamási Áron Elméleti Líceum*	*Székelyudvarhely*
Nyulas Dorottya	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Orbán A. Szabolcs	*Székely Mikó Kollégium*	*Arad*
Orbán M. Szabolcs	*Székely Mikó Kollégium*	*Arad*
Orbán Ottó	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Pásztor Timea	*Tamási Áron Elméleti Líceum*	*Székelyudvarhely*
Rab Enikő-Sarolta	*Székely Mikó Kollégium*	*Arad*
Rend Melitta	*Octavian GogaFőgimnázium*	*Zilah*
Sándor Péter	*Kölcsey Ferenc Főgimnázium*	*Szatmárnémeti*
Sebestyén Ágnes	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Spir Anita	*Csiky Gergely Iskolacsoport*	*Nagyvarad*
Szabó Enikő	*Baróti Szabó Dávid Iskolacsoport*	*Barót*
Szilveszter István	*Bartók Béla Elméleti Líceum*	*Temesvár*
Takács Petra	*Báthory István Elméleti Líceum*	*Kolozsvár*
Takács Tímea	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Tempfli Arnold	*Kölcsey Ferenc Főgimnázium*	*Szatmárnémeti*
Tikosi Kinga	*Tamási Áron Elméleti Líceum*	*Székelyudvarhely*
Vajda Szabolcs	*Báthory István Elméleti Líceum*	*Kolozsvár*
Varga Roland-József	*Arany János Főgimnázium*	*Nagyvarad*
Várhelyi Melinda	*Báthory István Elméleti Líceum*	*Kolozsvár*
Vass Balázs	*Tamási Áron Elméleti Líceum*	*Székelyudvarhely*
Vitályos Zsolt	*Nagy Mózes Elméleti Líceum*	*Kézdivásárhely*
Zsogon Csilla	*Nagy Mózes Elméleti Líceum*	*Kézdivásárhely*

XI. OSZTÁLY

Bedő Anita	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Bodor Zoltán	*Kölcsey Ferenc Főgimnázium*	*Szatmárnémeti*
Boros Zoltán-János	*Csiky Gergely Iskolacsoport*	*Brassó*
Brudaşcă Renáta	*Báthory István Elméleti Líceum*	*Kolozsvár*
Buslig Szabolcs	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Csiki Szabolcs	*Áprily Lajos Főgimnázium*	*Brassó*
Ferencz-Hanke Réka	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Fülöp Annamária	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Garda Ingrid	*Kölcsey Ferenc Főgimnázium*	*Szatmárnémeti*
Gencsi Márta	*Tamási Áron Elméleti Líceum*	*Székelyudvarhely*
Gurza László	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
György Levente	*Salamon Ernő Gimnázium*	*Sepsiszentgyörgy*
Hadnagy Kinga	*Csiky Gergely Iskolacsoport*	*Brassó*
Ilyés Beatrix	*Tamási Áron Elméleti Líceum*	*Székelyudvarhely*
Jakab Lilla	*Octavian GogaFőgimnázium*	*Sepsiszentgyörgy*
János Csongor	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Kakucs Szende Gizella	*Baróti Szabó Dávid Isk .cs.*	*Barót*
Kassay Farkas Ákos	*János Zsigmond Unit. Kollégium*	*Kolozsvár*
Kecseti Hunor	*Salamon Ernő Gimnázium*	*Sepsiszentgyörgy*
Keresztes Lehel	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Kocs Kinga	*Áprily Lajos Főgimnázium*	*Brassó*
Kolcza Tünde	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Kolumbán József	*Báthory István Elméleti Líceum*	*Kolozsvár*
Konnerth Rajmund	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Lakatos István	*Székely Mikó Kollégium*	*Brassó*
Lőrincz Emma	*Áprily Lajos Főgimnázium*	*Brassó*
Lukács Bettina	*Áprily Lajos Főgimnázium*	*Brassó*

Mandici Szilárd	*Kölcsey Ferenc Főgimnázium*	*Szatmárnémeti*
Módis László	*Németh László Elméleti Líceum*	*Sepsiszentgyörgy*
Nagy Orsolya	*Petru Maior Iskolaközpont*	*Régen*
Nemes Kinga Gabriella	*Bartók Béla Elméleti Líceum*	*Temesvár*
Pál Levente	*Tamási Áron Elméleti Líceum*	*Székelyudvarhely*
Péterfi Zsuzsánna	*Silvania Főgimnázium*	*Brassó*
Polcz Péter	*Kölcsey Ferenc Főgimnázium*	*Szatmárnémeti*
Sasu Róbert	*Székely Mikó Kollégium*	*Brassó*
Sebestyén Balázs	*Báthory István Elméleti Líceum*	*Kolozsvár*
Sipos Lehel	*Székely Mikó Kollégium*	*Nagyszalonta*
Sütő Szabolcs	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Szabó Ágnes	*Nagy Mózes Elméleti Líceum*	*Kézdivásárhely*
Szakács Csilla	*Baczkamadarasi Kis Gergely Református Kollégium*	*Székelyudvarhely*
Szász Mátyás	*Áprily Lajos Főgimnázium*	*Brassó*
Székely Noémi	*Petru Maior Iskolaközpont*	*Régen*
Szép László Zoltán	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Török Tamás	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Várady Emese	*Németh László Elméleti Líceum*	*Gyergyószentmiklós*

XII. OSZTÁLY

Akácsos Tibor	*Baróti Szabó Dávid Iskolacsoport*	*Barót*
Aszalos Csongor	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Bajnóczi Tamás	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Bajzát Brigitta	*Mikes Kelemen Főgimnázium*	*Margitta*
Balázs Béla	*Kölcsey Ferenc Főgimnázium*	*Szatmárnémeti*
Bánházi Botond	*Octavian GogaFőgimnázium*	*Nagybánya*
Biró Emese	*Tamási Áron Elméleti Líceum*	*Székelyudvarhely*
Biró Zsolt	*Tamási Áron Elméleti Líceum*	*Székelyudvarhely*
Hodgyai Zoltán	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Illyés Ágota	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Ilyés Zoltán	*Silvania Főgimnázium*	*Margitta*
Izsák István	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Károly Réka	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Kelemen Iringó	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Kerestély Enikő	*Tamási Áron Elméleti Líceum*	*Székelyudvarhely*
Kilyen Attila-Örs	*Székely Mikó Kollégium*	*Gyergyószentmiklós*
Kinczel Lajos Roland	*Petru Maior Iskolaközpont*	*Régen*
Kis Kálmán	*Tamási Áron Elméleti Líceum*	*Székelyudvarhely*
Kisfaludi-Bak Zsombor	*Székely Mikó Kollégium*	*Gyergyószentmiklós*
Kolcsár Kálmán Imre	*Salamon Ernő Gimnázium*	*Nagybánya*
Korpos Andor	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Kovács Ákos	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Kovács Zsolt Péter	*Salamon Ernő Gimnázium*	*Nagybánya*
Lestyán Erika	*Nagy Mózes Elméleti Líceum*	*Kézdivásárhely*
Matanie Ábel	*Csiky Gergely Iskolacsoport*	*Gyergyószentmiklós*
Menyhárt Bálind	*Petru Maior Iskolaközpont*	*Régen*
Mihály Kinga	*Tamási Áron Elméleti Líceum*	*Székelyudvarhely*
Nagy Tímea	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*

Nikora Nárcisz	*Kölcsey Ferenc Főgimnázium*	*Szatmárnémeti*
Padrah István	*Leővey Klára Líceum*	*Máramarossziget*
Papp Ingrid	*Ady Endre Elmeleti Liceum*	*Gyergyószentmiklós*
Rangyák Eszter	*Márton Áron Gimnázium*	*Csíkszereda*
Simon Levente	*Székely Mikó Kollégium*	*Gyergyószentmiklós*
Szabó Péter	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Szakács Zselyke	*Ady Endre Elmeleti Liceum*	*Margitta*
Szász Zsigmond	*Áprily Lajos Főgimnázium*	*Margitta*
Szatmári Barna	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*	*Marosvásárhely*
Tiba Attila	*Csiky Gergely Iskolacsoport*	*Gyergyószentmiklós*
Tóth Miklós-János	*Bartók Béla Elméleti Líceum*	*Temesvár*
Tóth Orsolya	*Ady Endre Elmeleti Liceum*	*Gyergyószentmiklós*
Vas Orsolya	*Mikes Kelemen Főgimnázium*	*Sepsiszentgyörgy*
Visky Mária	*Báthory István Elméleti Líceum*	*Kolozsvár*

RÉSZTVEVŐ TANÁROK NÉVSORA

Dr. András Szilárd	*Babes-Bolyai Egyetem*
Bencze Mihály	*Áprily Lajos Főgimnázium*
Betuker Enikő	*Octavian GogaFőgimnázium*
Biró Judit	*Székely Mikó Kollégium*
Bíró Zoltán	*Salamon Ernő Gimnázium*
Both Gábor	*Székely Mikó Kollégium*
Csapó Hajnalka	*Márton Áron Gimnázium*
Dávid Géza	*Tamási Áron Elméleti Líceum*
Egyed Geza	*Nagy Mózes Elméleti Líceum*
Farkas Csaba	*Babes-Bolyai Egyetem*
György Gabriella	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*
Hatházi Annamária	*Báthory István Elméleti Líceum*
István Zoltán	*Ady Endre Líceum*
Kacsó Ferenc	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*
Kató Enikő	*Kölcsey Ferenc Főgimnázium*
Kéry Hajnal	*Ady Endre Líceum*
Kovács Béla	*Kölcsey Ferenc Főgimnázium*
Kovács Lajos	*Tamási Áron Elméleti Líceum*
Mátéfi István	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*
Mészár Julianna	*Arany János Főgimnázium*
Nagy Örs	*Babes-Bolyai Egyetem*
Nemes András	*Bartók Béla Elméleti Líceum*
Oláh-Ilkei Árpád	*Baróti Szabó Dávid Iskolacsoport*
Páll Olga	*Márton Áron Gimnázium*
Péter András	*Csiky Gergely Iskolacsoport*
Sebestyén József	*Orbán Balázs Gimnázium*
Stan Ágota	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*
Szász Árpád	*Mikes Kelemen Főgimnázium*
Dr. Szász Róbert	*Sapientia Erdélyi MagyarTudományegyetem*
Szilágyi Emőke	*Bolyai Farkas Elméleti Líceum*
Szilágyi Jutka	*Báthory István Elméleti Líceum*
Takács Attila	*Leővey Klára Líceum*
Tamási Csaba	*Márton Áron Gimnázium*

MEGHÍVOTTAK

Matekovics Mihály, *a tanügyi és kutatási tárca nemzeti kisebbségek oktatásáért felelős vezérigazgatója*
Csegzi Sándor, *Marosvásárhely alpolgármestere*
Simon János, *matematika szakos tanfelügyelő, Maros megye*
Dr. Weszely Tibor, *Sapientia Erdélyi MagyarTudományegyetem*

IX. OSZTÁLY

1.Deák Norbert	Báthory István Elméleti Líceum	63	**I.. díj**
2.Fülöp Balogh Beátrix	Báthory István Elméleti Líceum	54	**II.. díj**
3.Komán Attila Zsombor	Áprily Lajos Főgimnázium	53	**II.. díj**
4.Péter Emőke	Márton Áron Gimnázium	53	**II.. díj**
5.Sandy Endre Kristóf	Márton Áron Gimnázium	52	**III.. díj**
6.Szabó-Györke István	Márton Áron Gimnázium	52	**III.. díj**
7.Nagy Tamás	Márton Áron Gimnázium	50	**III.. díj**
8.Porsche Endre	Tamási Áron Elméleti Líceum	45	Dicséret
9.Lakatos Tamás	Kölcsey Ferenc Főgimnázium	45	Dicséret
10.Kegyes Krisztina	Báthory István Elméleti Líceum	44	Dicséret
11.Saszet Kata	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	44	Dicséret
12.Móritz Sándor	Silvania Főgimnázium	44	Dicséret
13.Pisak Lukáts Borbála	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	40	Dicséret
14.Budai Kinga	Nagy Mózes Elméleti Líceum	40	Dicséret
15.Szántó Zoltán-György	Bartók Béla Elméleti Líceum	37	Dicséret
16.Halász Hajnalka	Mihai Eminescu Főgimnázium	37	Dicséret
17.Mester Ágnes	Székely Mikó Kollégium	36	Dicséret
18.Vass Gergely	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	35	Dicséret
19.Kémenes Endre	Salamon Ernő Gimnázium	34	Dicséret
20.Kilyén Nándor-Alpár	Székely Mikó Kollégium	33	Dicséret
21.György Szabolcs	Mihai Eminescu Főgimnázium	32,5	Dicséret
22.Szederjesi Arnold	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	29	Dicséret
23.Cseh Júlia	Nagy Mózes Elméleti Líceum	29	Dicséret
24.Farkas Domokos	Baróti Szabó Dávid Isk. Cs.	27	Dicséret
25.Germán- Salló Zsófia	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	27	Dicséret

Megjegyzés. A vonal fölötti díjazottak képviselik Erdélyt a XVIII. Nemzetközi Magyar Matematika Versenyen, 2009. március 12-16. között Gyulán.

X. OSZTÁLY

1.Borsos Zalán	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	72	**I. díj**
2.Bondici László	Kölcsey Ferenc Főgimnázium	69,5	**I. díj**
3.Vass Balázs	Tamási Áron Elméleti Líceum	66	**I. díj**
4.Benedek Annabella	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	45	**II. díj**
5.Tikosi Kinga	Tamási Áron Elméleti Líceum	40	**II. díj**
6.Takács Petra	Báthory István Elméleti Líceum	37	**III. díj**
7.Fehér Áron	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	35	Dicséret
8.Lőrinczi Ábel	Mikes Kelemen Főgimnázium	35	Dicséret
9.Orbán M. Szabolcs	Székely Mikó Kollégium	35	Dicséret
10.Várhelyi Melinda	Báthory István Elméleti Líceum	34,5	Dicséret
11.Csiszér Ágnes	Márton Áron Gimnázium	29	Dicséret
12.László Alma	Silvania Főgimnázium	33	Dicséret
13.Fazekas Norbert	Mihai Eminescu Főgimnázium	32	Dicséret
14.Bartalis Szilárd	Salamon Ernő Gimnázium	29	Dicséret
15.Zsögön Csilla	Nagy Mózes Elméleti Líceum	29	Dicséret
16.Illyés Attila	Márton Áron Gimnázium	28	Dicséret
17.Sándor Péter	Kölcsey Ferenc Főgimnázium	27,5	Dicséret
18.Dénes Károly	Ady Endre Elmeléti Líceum	27	Dicséret
19.Grecu Marius Iustin	Márton Áron Gimnázium	27	Dicséret
20.Tempfli Arnold	Kölcsey Ferenc Főgimnázium	27	Dicséret
21.Csiki Timea	Tamási Áron Elméleti Líceum	26	Dicséret
22.Hevele Balázs	Orbán Balázs Gimnázium	26	Dicséret
23.Szilveszter István	Bartók Béla Elméleti Líceum	26	Dicséret
24.Vajda Szabolcs	Báthory István Elméleti Líceum	26	Dicséret

XI. OSZTÁLY

1.Kolumbán József	Báthory István Elméleti Líceum	47,5	**I. díj**
2.Sasu Róbert	Székely Mikó Kollégium	42,5	**II. díj**
3.Mandici Szilárd	Kölcsey Ferenc Főgimnázium	41	**II. díj**
4.Sipos Lehel	Székely Mikó Kollégium	40	**II. díj**
5.Hevele István	Orbán Balázs Gimnázium	38	**III. díj**
6.Polcz Péter	Kölcsey Ferenc Főgimnázium	36,5	**III. díj**
7.Pál Levente	Tamási Áron Elméleti Líceum	34,5	**III. díj**
8.Bodor Zoltán-Márk	Kölcsey Ferenc Főgimnázium	32	Dicséret
9.Módis László	Németh László Elméleti Líceum	29	Dicséret
10.Gencsi Márta	Tamási Áron Elméleti Líceum	28,5	Dicséret
11.Farkas Ágnes	Orbán Balázs Gimnázium	27,5	Dicséret
12.Ferencz-Hanke Réka	Márton Áron Gimnázium	27	Dicséret
13.Boros Zoltán-János	Csiky Gergely Iskolacsoport	26,5	Dicséret
14.Hadnagy Kinga	Csiky Gergely Iskolacsoport	26,5	Dicséret
15.Kecseti Hunor	Salamon Ernő Gimnázium	26,5	Dicséret
16.Sebestyén Balázs	Báthory István Elméleti Líceum	26,5	Dicséret
17.Buslig Szabolcs	Márton Áron Gimnázium	26	Dicséret
18.Péterfi Zsuzsánna	Silvania Főgimnázium	24,5	Dicséret
19.Kassay Farkas Ákos	János Zsigmond Unit.Kollégium	24	Dicséret
20.Brudaşcă Renáta	Báthory István Elméleti Líceum	22,5	Dicséret
21.Bedő Anita	Márton Áron Gimnázium	22	Dicséret
22.György Levente	Salamon Ernő Gimnázium	22	Dicséret
23.Ilyés Beatrix	Tamási Áron Elméleti Líceum	22	Dicséret

XII. OSZTÁLY

1.Kovács Zsolt-Péter	Salamon Ernő Gimnázium	**43**	I. díj
2.Illyés Ágota	Márton Áron Gimnázium	**41**	I. díj
3.Kisfaludi-Bak Zsombor	Székely Mikó Kollégium	**41**	I. díj
4.Nagy Tímea	Márton Áron Gimnázium	**38**	III. díj
5.Bajnóczi Tamás	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	**34**	Dicséret
6.Biró Zsolt	Tamási Áron Elméleti Líceum	**32**	Dicséret
7.Károly Réka	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	**32**	Dicséret
8.Kilyén Attila-Örs	Székely Mikó Kollégium	**30**	Dicséret
9.Bánházi Botond László	Octavian Goga Főgimnázium	**28**	Dicséret
10.Izsák István	Bolyai Farkas Elméleti Líceum	**27**	Dicséret
11.Rangyák Eszter	Márton Áron Gimnázium	**27**	Dicséret
12.Kiss Kálmán	Tamási Áron Elméleti Líceum	**26**	Dicséret
13.Simon Levente	Székely Mikó Kollégium	**25**	Dicséret
14.Szász Zsigmond-Attila	Áprily Lajos Főgimnázium	**25**	Dicséret
15.Visky Mária	Báthory István Elméleti Líceum	**25**	Dicséret