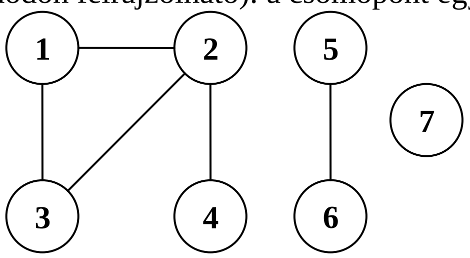
EGYSZERŰ, NEM IRÁNYÍTOTT (IRÁNYÍTATLAN) GRÁF

Adott a G = (V, E) gráf ahol a V a csomópontok, E az élek halmaza
E = {(x, y) | x, $y \in$ V, $x \neq y$ (nincs hurokél) és (x, y) = (y, x))
Jelölések: |V| = n (a csomópontok száma n), |E| = m (az élek száma m)
Csomópont fokszáma: $d(x)$ – az x csomóponthoz illeszkedő élek száma
Az összes csomópont fokszámának összege = $2m$ (az élek számának kétszerese)
Ha egy gráfra adottak a csomópontok fokszámai (n pont és m darab él), akkor

- minden fokszám kisebb kell legyen, mint n
- a fokszámok összege páros kell legyen
- a fokszámok összege = $2m$

Gráfok megadásának lehetőségei

1.) Halmazokkal: Adott a G = (V, E) gráf, ahol V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} E = {(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (5, 6)}
2.) Grafikus reprezentáció (sokféle módon felrajzolható): a csomópont egy kör, az él pedig egy vonal



3.) Szomszédossági mátrix: $n \times n$-es négyzetes mátrix, melyben csak 0 és 1 van

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{ha létezik } (i, j) \in E \textit{ él} \\ 0 & \textit{különben} \end{cases}$$

- mivel az egyszerű gráfban nincs hurokél ⇒ a főátlón csak 0 van
- mivel (i, j) él ugyanaz mint a (j, i) él ⇒ a mátrix szimmetrikus a főátlóra nézve
- a mátrixban szereplő egyesek száma $2m$
- adott sorban vagy oszlopban szereplő egyesek darabszáma egyenlő az adott csomópont fokszámával

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1	0	1	1	0	0	0	0
2	1	0	1	1	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0

4.) Szomszédossági lista: minden pont esetén felsoroljuk a vele szomszédos csomópontokat

Pont	*Szomszédok*
1	2, 3
2	1, 3, 4
3	1, 2
4	2
5	6
6	5
7	–

Izolált pont, elszigetelt pont: olyan pont, melynek nincs szomszédja, ennek a pontnak a fokszáma 0 (a példában ilyen a 7)

Terminális pont: csak egy szomszédja van (a példában 4, 5, 6)

Részgráf: két módon képezhető

- az eredeti gráfból elhagyunk éleket (graf parţial) – néha csak részgráfnak mondják
- az eredeti gráfból elhagyunk csomópontokat a hozzájuk tartozó élekkel együtt (subgraf) – néha algráfnak nevezik

FELADATOK:

1.) Hány részgráfja (parciális gráfja) van annak a nem irányított gráfnak, melynek n csomópontja és m éle van?

$$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + C_m^3 + \ldots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m$$

(először megmarad minden él, utána kitörlünk egyet, utána kettőt, utána hármat, ...)

2.) Hány darab *n* csomópontot tartalmazó nem irányított gráf képezhető? Két gráfot akkor tekintünk különbözőnek, ha a szomszédossági mátrixaik különböznek. $2^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}$

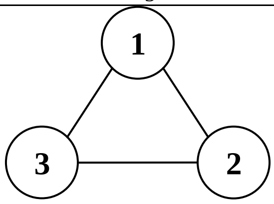
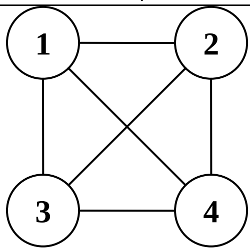
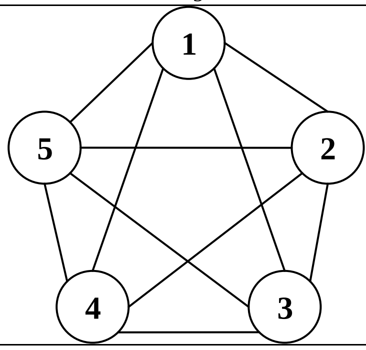
A szomszédossági mátrixban n^2 elem van, a főátló csupa nulla és szimmetrikus a főátlóra nézve (vagyis csak a főátló feletti rész kitöltésével kell foglalkozni), tehát $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ pozícióra lehet 0 vagy 1 számot írni.

A lehetőségek száma tehát $2^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}$.

3.) Hány különböző *n* csomópontot tartalmazó nem irányított gráfban van él 1 és 2 között? Két gráfot akkor tekintünk különbözőnek, ha a szomszédossági mátrixaik különböznek.

A fenti esetek felében nincs él az 1 és 2 csomópontok között, tehát a megoldás $2^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}-1}$.

Teljes gráf: a gráf bármely két pontja össze van kötve egymással (bármely két pontja szomszédos). Ennek a gráfnak van a legtöbb éle.

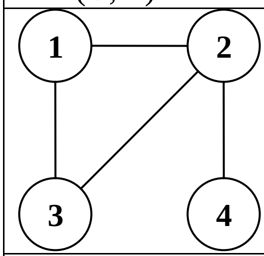
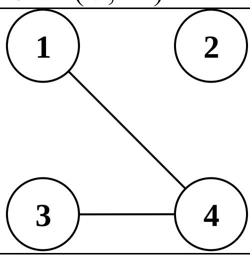
K_3	K_4	K_5
		

Tulajdonságai ha a teljes gráfnak *n* pontja van:

– minden pont fokszáma *n*-1

– az élek száma $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$

Egy gráf komplementer (kiegészítő) gráfja: ugyanannyi pontból áll, mint az eredeti gráf, és az eredetivel nincs egyetlen közös éle sem, a kettő egyesítése pedig megadja a teljes gráfot (a komplementer gráfban azok a pontok szomszédosak, melyek az eredetiben nem voltak azok)

G = (V, E)	G' = (V, E')
	
$E \cap E' = \emptyset$ és $G \cap G' = K_n$, ha $\lvert V\rvert = n$	

Út a gráfban (lánc): olyan $x_1, x_2, ..., x_k$ pontsorozat, melyre igaz hogy bármely két, az útban szomszédos pont esetén létezik köztük él a gráfban

Elemi útvonal: olyan útvonal, melyben a pontok és élek nem ismétlődnek

Kör: olyan út, melyben a kezdő és végpont megegyezik és legalább három pontból áll

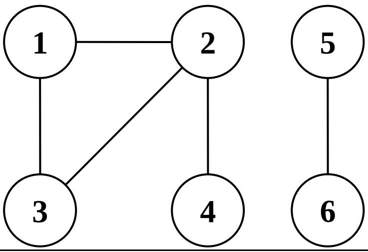
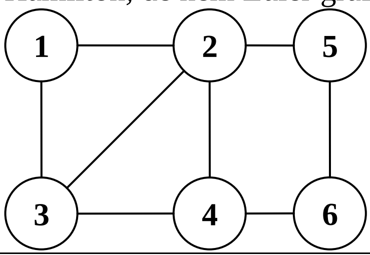
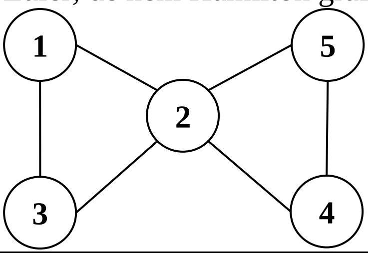
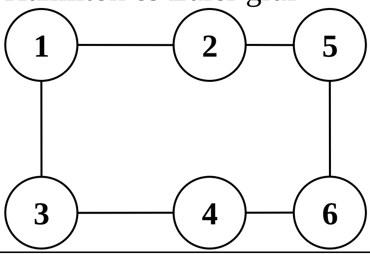
Hamilton út: olyan útvonal, mely tartalmazza a gráf összes **pontját** egyszer és csak egyszer

Hamilton kör: olyan Hamilton út, melynek kezdő és végpontja megegyezik

Hamilton gráf: olyan gráf, mely tartalmaz egy Hamilton kört

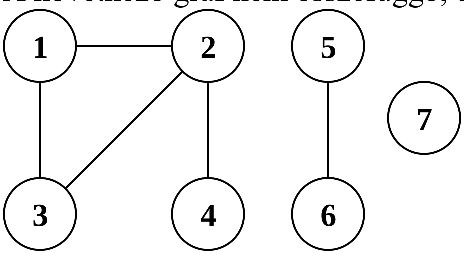
Euler vonal: olyan útvonal, mely tartalmazza a gráf összes **élét** egyszer és csak egyszer

Euler kör: olyan euler vonal, melynek kezdő és végpontja megegyezik
Euler gráf: olyan gráf, mely tartalmaz egy euler kört
TÉTEL: egy gráf Euler gráf akkor és csak akkor ha összefüggő és minden pont fokszáma páros.

Nem Hamilton és nem Euler gráf 	Hamilton, de nem Euler gráf 
Euler, de nem Hamilton gráf 	Hamilton és Euler gráf 

Összefüggő (konex) gráf: bármely két pontja között létezik út

Összefüggő komponensek: amennyiben egy gráf nem összefüggő, akkor összefüggő komponensekből áll. Egy izolált pont is egy összefüggő komponenst alkot.
A következő gráf nem összefüggő, de három konex komponensből áll



I. komponens elemei: 1, 2, 3, 4
II. komponens elemei: 5, 6
III. komponens elemei: 7

Amennyiben egy gráfnak *p* darab konex komponense van, akkor *p*-1 darab új él segítségével a gráf is összefüggővé válik (a komponenseket összekötjük egymással)

FA

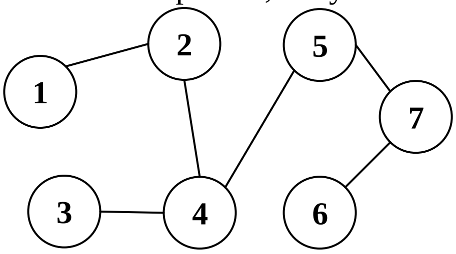
Egy speciális gráf, mely rendelkezik a következő tulajdonságokkal
- összefüggő
- körmentes
- *n* pont esetén *n*-1 éle van
- bármely két pontja esetén létezik egy és csak egy útvonal, mely összeköti a két pontot
- egy *n* pontos fában egy csomópont fokszáma legtöbb *n*-1 lehet

Tulajdonságok:

– ha hozzáadunk egy új élt ⇒ keletkezik egy kör
– ha kitörlünk belőle egy élt ⇒ két összefüggő komponensre esik szét

A fa ábrázolására használhatjuk bármelyik ábrázolási módot, melyet a nem irányított gráfokra adtak meg, de létezik egy új ábrázolási mód (a szomszédossági mátrixban túl sok a nulla, túl sok felesleges információt tárolunk benne).

Szülő-vektoros ábrázolás: (vektor és nem mátrix) kitüntetünk egy csomópontot a fából, ez lesz a fa *gyökere*. Minden pont esetén feltüntetjük a *közvetlen őst* (*szülőt*) akitől származik. A gyökérnek nincs szülője, tehát ide 0 kerül. Azok a pontok, melyeknek nincs közvetlen utóduk a *levelek*.

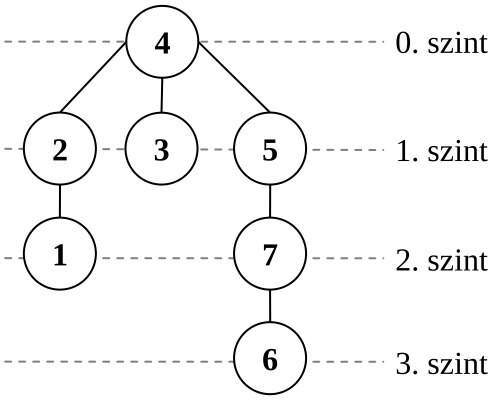


	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
T = (	2,	4,	4,	0,	4,	7,	5)

Gyökér: 4
Levelek: 1, 3, 6 (nem szerepelnek a szülővektorban)
(T = tata)

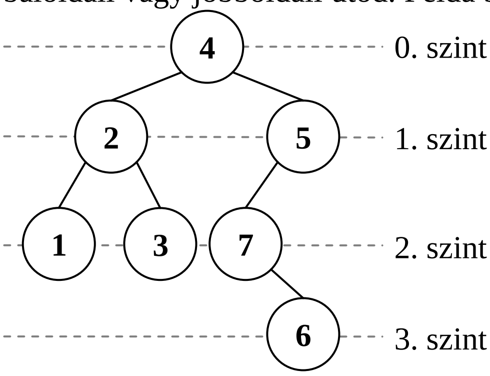
A szülő-vektoros ábrázolás esetén:
- mindig csak egy gyökér lehet
- nem lehetnek kereszthivatkozások (2 szülője 5 és 5 szülője 2)

A gyökeres fákat szintekbe lehet szervezni. A gyökér csomópont a 0-ik szinten van. A gyökértől a legtávolabbi levélig vezető út hossza (éleinek száma) a fa *magassága*.



A példában a fának **4** szintje van és a fa magassága (szintszám – 1) **3.**
A gyökértől a legtávolabbi levélig vezető út: 4, 5, 7, 6
A leghosszabb út: 6, 7, 5, 4, 2, 1
A leghosszabb út hossza: 5
Levelek: 1, 3, 6

Bináris fa: speciális fa, melyben minden csomópontnak maximum két utóda lehet és egy utód esetében is van baloldali vagy jobboldali utód. Példa bináris fára:



TÉTEL: Egy olyan bináris fában, melynek magassága n-1 legtöbb 2^n-1 csomópont lehet.

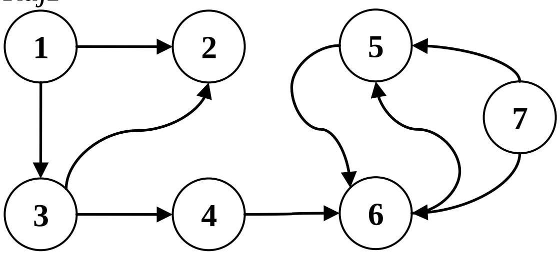
IRÁNYÍTOTT GRÁF

$\vec{G} = (V, \vec{E})$. Adott az $e = (x, y) \in \vec{E}$ él, a megadásnál fontos a sorrend (tehát $(x, y) \neq (y, x)$)
(Az élek halmaza rendezett számpárokból áll)

– x az él kezdőpontja
– y az él végpontja

Példa: $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $\vec{E} = \{(1, 2), (1, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 6), (5, 6), (6, 5), (7, 5), (7, 6)\}$

Rajz



Szomszédossági mátrix

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	1	1	0

Szomszédossági lista

1	2, 3
2	–
3	2, 4
4	6
5	6
6	5
7	5, 6

A szomszédossági mátrix tulajdonságai:

– a mátrix főátlója csupa nulla, mert nincs hurokél
– *nem* szimmetrikus a főátlóra nézve
– a mátrixban levő egyesek száma egyenlő az élek számával (m)

Egy csomópont kifoka (kimenő élek száma, ahol ő a kezdőpont): $d^+(x)$
(a szomszédossági mátrixban a megfelelő ***sorban*** az egyesek száma)

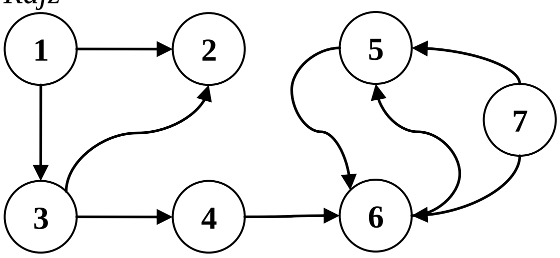
Egy csomópont befoka (bejövő élek száma, ahol ő a végpont): $d^-(x)$
(a szomszédossági mátrixban a megfelelő ***oszlopban*** az egyesek száma)

Egy csomópont fokszáma (kifok + befok): $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$

Az n pontból álló irányított gráfok száma $2^{n(n-1)}$.

Útmátrix: $G = (V, E)$, $|V| = n$ akkor az útmátrixnak n sora és n oszlopa van, 0 és 1 elemeket tartalmaz, az i, j pozícióban akkor van 1 ha létezik egy út az i pontból a j pontba.

Rajz



Útmátrix

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1	1	1	1	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	1	1	1	0
4	0	0	0	0	1	1	0
5	0	0	0	0	1	1	0
6	0	0	0	0	1	1	0
7	0	0	0	0	1	1	0

FELADAT:

1.) Hány olyan irányított n csomópontú gráf létezik, amely esetén az i és j különböző csomópontok között legalább egy él létezik? $3^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}$

n csomópontból 2 tetszőleges pontot C_n^2 módon választhatunk ki. Irányított gráf esetén pedig két pont között háromféle él lehetséges: (i, j) vagy (j, i) vagy (i, j) és (j, i).

SZÓTÁR

graf neorientat	nem irányított gráf
graf orientat	irányított gráf
nod	csomópont
arbore	fa
arbore binar	bináris fa
muchie	él
arc	irányított él
graf parţial	algráf, részgráf
subgraf	algráf, részgráf
graf conex	konex, összefüggő gráf
drum	út
cerc	kör
graf complementar	komplementer gráf
graf	teljes gráf
matrice de adiacenţă	szomszédossági mátrix
listă de adiacenţă	szomszédossági lista
gradul nodului	csomópont fokszáma
grad	fokszám
grad interior	belső fokszám
grad exterior	külső fokszám
lanţ	útvonal (nem irányított)
lanţ elementar	elemi útvonal
drum	útvonal (irányított)
drum elementar	elemi útvonal
circuit	kör
circuit elementar	elemi kör

elemi = nem ismétlődnek benne az élek és a pontok